

BAC (JUIN 2010)

EXERCICE 1

On considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les points $A(-1, 0, 3)$, $B(3, -0, 0)$ et $C(7, 1, -3)$ et la sphère (S) d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y - 15 = 0$$

1- montrer que $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = 3\vec{i} + 4\vec{k}$, et déduire que $3x + 4z - 9 = 0$ est l'équation cartésienne du plan (ABC)

2- montrer que (S) est une sphère de centre $\Omega(3, 1, 0)$ et de rayon 5

3- Soit (Δ) la droite qui passe par Ω et perpendiculaire au plan (ABC)

a- montrer que
$$\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 \\ z = 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$
 est une représentation paramétrique de la droite

(Δ)

b- montrer que la droite (Δ) coupe la sphère (S) aux points E(6,1,4) et F(0,1,-4)

EXERCICE 2

1- résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante $z^2 - 6z + 10 = 0$

2- on considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

Les points A, B et C d'affixes respectivement $a = 3 - i$, $b = 3 + i$, et $c = 7 - 3i$

Soit z l'affixe du point M du plan et z' l'affixe du point M' l'image du point M par

la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$

a- montrer que: $z' = iz + 2 - 4i$

b- vérifier que l'affixe de C' l'image de C par la rotation R est $c' = 5 + 3i$

c- montrer que $\frac{c' - b}{c - b} = \frac{1}{2}i$, puis déduire que le triangle BCC' est rectangle en B et que

$$BC = 2 BC'$$

EXERCICE 3

Une caisse contient 5 boules blanches, 2 boules noires et 3 boules rouges (indiscernable au toucher)

On tire simultanément 4 boules de la caisse

1-on considère les événements: A: "obtenir seulement une seule boule rouge", et

B: "obtenir au moins une boule blanche"

Montrer que: $P(A) = \frac{1}{2}$ et $P(B) = \frac{41}{42}$

2- on considère la variable aléatoire X qui fait correspondre tout tirage au nombre de boules rouges tirées

a- vérifier que les valeurs prises par la variable aléatoire X sont: 0, 1, 2, 3

b- montrer que: $P(X = 0) = \frac{1}{6}$ et $P(X = 2) = \frac{3}{10}$

c- déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

EXERCICE 4

Soit (u_n) une suite définie par: $u_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{2u_n}$

1- montrer par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 1$

2-on considère la suite numérique (v_n) définie par: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n = \frac{u_n - 1}{2u_n - 1}$

a- montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$, et déduire que

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

b- montrer que $u_n = \frac{v_n - 1}{2v_n - 1}$, puis déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

3- calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$ où (w_n) est une suite numérique définie par: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad w_n = \ln(u_n)$

EXERCICE 5

I – soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 + 4x e^{2x}$

1- montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g'(x) = 4(2x + 1) e^{2x}$

2- montrer que g est décroissante sur $\left] -\infty, -\frac{1}{2} \right]$ et croissante sur $\left[-\frac{1}{2}, +\infty \right[$

3-a- montrer que $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{2}{e}$, et vérifier que $g\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$

b- déduire que: $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g(x) > 0$

II – on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = (2x - 1)e^{2x} + x + 1$ et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$$(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm)$$

1- calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, puis montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ (utiliser $\lim_{X \rightarrow -\infty} X e^X = 0$)

2- montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) = g(x)$, puis déduire que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$

3- a- calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, et déduire que la courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

b- calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 1)$, et déduire que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique de la courbe (C) au voisinage de $-\infty$

c- déterminer le couple des coordonnées du point d'intersection de la courbe (C) et la droite (Δ) , puis montrer que la courbe (C) se trouve au dessous de la droite (Δ) dans l'intervalle

$\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$, et au dessus de la droite (Δ) dans l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$

4- a- montrer que $y = x$ est l'équation de la droite (T) tangente de la courbe (C) au point O

b- montrer que la courbe (C) a un point d'inflexion d'abscisse $\left(\frac{-1}{2}\right)$ (déterminer l'ordonnée du point d'inflexion n'est pas demandé)

5- construire la courbe (C) et les droites (T) et (Δ) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

6- a- en utilisant l'intégration par partie, montrer que $\int_0^1 (2x - 1)e^{2x} dx = 1$

b- calculer en cm^2 l'aire de la surface du plan limité par la courbe (C) la droite (T) et les droites $x = 0$ et $x = 1$

BAC (JUILLET 2010)

EXERCICE 1

On considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les points $A(0, -2, 0)$, $B(1, 1, -4)$ et $C(0, 1, -4)$ et la sphère (S) d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 11 = 0$$

1- montrer que (S) est une sphère de centre $\Omega(1, 2, 3)$ et de rayon 5

2-a- montrer que $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = 4\vec{j} + 3\vec{k}$, et déduire que $4y + 3z + 8 = 0$ est l'équation cartésienne du plan (ABC)

b- calculer $d(\Omega, (ABC))$, puis déduire que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S)

3- Soit (Δ) la droite qui passe par Ω et perpendiculaire au plan (ABC)

a- montrer que $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 4t \\ z = 3 + 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ est une représentation paramétrique de la droite (Δ)

b- montrer que la droite (Δ) coupe la sphère (S) au point H(1, -2, 0)

c- vérifier que le point H est le point tangent du plan (ABC) à la sphère (S)

EXERCICE 2

1- résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante $z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$

2- on considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

Les points A, B et C d'affixes respectivement $a = 8i$, $b = 4\sqrt{3} - 4i$, et $c = 2(4\sqrt{3} + 4i)$

Soit z l'affixe du point M du plan et z' l'affixe du point M' l'image du point M par

la rotation R de centre O et d'angle $\frac{4\pi}{3}$

a- montrer que $z' = \left(\frac{-1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) z$

b- vérifier que le point B est l'image du point A par la rotation R

c- montrer que $\frac{a-b}{c-b} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$, puis écrire le nombre $\frac{a-b}{c-b}$ sous forme

trigonométrique

d- déduire que le triangle ABC est équilatéral

EXERCICE 3

Une caisse contient 8 boules portant les numéros suivants: 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3 (indiscernable par le toucher)

On tire successivement et sans remise 2 boules de la caisse

1- soient l'événement A: "obtenir 2 boules portant le numéro 2", B: "obtenir 2 boules l'une d'elles porte au moins le numéro 3"

Montrer que $P(A) = \frac{3}{28}$ et $P(B) = \frac{13}{28}$

2- on considère la variable aléatoire X qui fait correspondre tout tirage au nombre de boules portant un nombre impair

a- déterminer les valeurs prises par la variables aléatoire X

b- montrer que $P(X = 1) = \frac{15}{28}$

c- déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

EXERCICE 4

Soit (u_n) une suite définie par: $u_0 = 1$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = \frac{3u_n}{21 + u_n}$

1-montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 0$

2-montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_{n+1} < \frac{1}{7} u_n$

3- montrer que: (u_n) est une suite décroissante et convergente

4- a- montrer par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n < \left(\frac{1}{7}\right)^n$

b- calculer la limite de la suite (u_n)

EXERCICE 5

I – soit g une fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x^3 - x - 2 \ln x + 3$

1-a- vérifier que : $(\forall x \in]0, +\infty[) \quad 3x^3 - x - 2 = (x-1)(3x^2 + 3x + 2)$

b- montrer que: $(\forall x \in]0, +\infty[) \quad g'(x) = \frac{(x-1)(3x^2 + 3x + 2)}{x}$

2-a- vérifier que : $(\forall x \in]0, +\infty[) \quad \frac{3x^2 + 3x + 2}{x} > 0$

b- déduire que le signe de $g'(x)$ est le signe de $(x-1)$

3-a- montrer que g est décroissante sur $]0, 1]$, et croissante sur $[1, +\infty[$

b- déduire que: $(\forall x \in]0, +\infty[) \quad g(x) > 0$ (remarquer que $g(1) > 0$)

II – on considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par: $f(x) = x - 1 + \frac{x - 1 + \ln x}{x^2}$ et soit

(C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ tel que

$$(\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm)$$

1- montrer que: $(\forall x \in]0, +\infty[) \quad f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$, puis déduire que f est croissante sur $]0, +\infty[$

2-a- montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$, puis interpréter géométriquement le résultat

b- montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1 + \ln x}{x^2} = 0$, puis que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$)

EXAMEN 2 BAC SCIENCE EX 2010

c- montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$

3- montrer que: $y = 3(x - 1)$ est l'équation de la droite tangente à la courbe (C) au point de coordonnées (1,0)

4- tracer la courbe (C) et la droite (Δ) (la courbe admet un point d'inflexion , dont on n'est pas obligé de déterminer)

5-a- on utilisant l'intégration par partie, montrer que $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = 1 - \frac{2}{e}$

(poser $v(x) = \ln x$ et $u'(x) = \frac{1}{x^2}$)

b- montrer que l'aire de la surface limitée par la courbe (C), la droite (Δ) et les droites

d'équation $x = 1$ et $x = e$ est $\left(1 - \frac{1}{e}\right) cm^2$