BAC (JUIN 2009)

EXERCICE 1

1- on considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$

Les points A, B et C d'affixes respectivement $a=2-2i$, $b=\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$, et

$c=1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i$

écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes $a\ et\ b$

2- on considère la rotation R de centre O et d'angle $\frac{5\pi}{6}$

Soit z l'affixe du point M du plan et z' l'affixe du point M' l'image du point M par la rotation R

a- montrer que: $z'=bz$

b- vérifier que le point C est l'image du point A par la rotation R

b- montrer que: $\arg c\equiv\arg a+\arg b\left[2\pi\right]$

c- déduire l'argument du nombre complexe c

EXERCICE 2

On considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, les points $A(-2,2,8)$, $B(6,6,0)$, $C(2,-1,0)\ et\ D(0,1,-1)$ et (S) l'ensemble des points de l'espace qui vérifient $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

1- déterminer le triplet des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OD}$, et déduire que $x+2y+2z=0$ est l'équation cartésienne du plan (OCD)

2- vérifier que (S) est la sphère de centre $\Omega(2,4,4)\ et\ de\ rayon\,6$

3-a- calculer la distance du point Ω au plan (OCD)

b- déduire que le plan (OCD) est tangent à la sphère (S)

c- vérifier que: $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$, puis déduire que le point O est le point tangent de la sphère et le plan (OCD)

EXERCICE 3

Une caisse contient 3 boules blanches, 4 boules noires et 5 boules rouges (indiscernable au toucher)

On tire simultanément 3 boules de la caisse

On considère les événements suivants:

A:" obtenir 3 boules de mêmes couleurs" et B:" obtenir 3 boules de couleurs différentes deux à deux"

1- montrer que: $P(A)=\frac{3}{44}\ \ et\ \ P(B)=\frac{3}{11}$

2- soit X la variable aléatoire qui fait correspondre tout tirage de 3 boules au nombre de couleurs qu'elles portent

a- déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X

b- déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X, et calculer l'espérance mathématique E(X)

EXERCICE4

On pose: $I = \int_{-2}^{-1} \frac{x}{x+3}\, dx$ $\quad et \quad$ $J = \int_{-2}^{-1} \ln(2x+6)\, dx$

1-a- vérifier que $\frac{x}{x+3} = 1 - \frac{3}{x+3}$ pour tout x différent de (-3)

b- montrer que $I = 1 - 3\ln 2$

2- en utilisant l'intégration par partie, montrer que $J = -I$

EXERCICE 5

On considère la fonction f définie par: $f(x) = 2\ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)$ et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1- vérifier que: $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right)\ e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = \left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1$, puis déduire que le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$, et que $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right)\ 1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x} > 0$

2- calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, puis montrer que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ln 4$ et interpréter le résultat géométriquement

3-a- montrer que : $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right) \quad f'(x) = \frac{2\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x} - 1\right)}{\left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1}$ et vérifier que $f'(0) = 0$

b- étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de : $\sqrt{e^x} - 1$, et déduire que la fonction f est croissante sur $\left[0, +\infty\right[$ et décroissante sur $\left]-\infty, 0\right]$

4-a- vérifier que: $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right) \quad f(x) = 2x + 2\ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)$

b- montre que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est une asymptote oblique de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$

5- a- vérifier que $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right) \quad e^x - 3\sqrt{e^x} + 2 = \left(\sqrt{e^x} - 1\right)\left(\sqrt{e^x} - 2\right)$

b- étudier sur $\mathbb{R}$ le signe de: $\sqrt{e^x} - 2$ $\ et\ $ $\left(\sqrt{e^x} - 2\right)\left(\sqrt{e^x} - 1\right)$

c- déduire que: $\left(\forall x \in \left[0, \ln 4\right]\right) \quad e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 \le \sqrt{e^x}$

d- montrer que: $\left(\forall x \in \left[0, \ln 4\right]\right) \quad f(x) - x < 0$

6- construire la droite (D) et la courbe (C) (on admet que la courbe (C) admet deux points d'inflexion)

7- on considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1\ et\ \left(\forall n \in \mathbb{N}\right) \quad u_{n+1} = f(u_n)$

a- montrer que: $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)\ 0 \le u_n \le \ln 4$ (utiliser la réponse des questions précédentes)

b- montrer que la suite (u_n) est décroissante

c- déduire que la suite (u_n) est convergente, puis calculer sa limite

BAC (JUILLET 2009)

EXERCICE 1

On considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, le point A(2,2,-1) et le plan (P) d'équation $2x+y+2z-13=0$, et la sphère (S) de centre $\Omega(1,0,1)$ $et\ de\ rayon\ 3$

1-a- montrer que: $x^2+y^2+z^2-2x-2z-7=0$ est l'équation cartésienne de la sphère (S), et vérifier que le point A appartient à (S)

b- calculer la distance du point Ω au plan (P), puis déduire que le plan (P) est tangent à la sphère (S)

2- soit (D) la droite qui passe par le point A et perpendiculaire au plan (P)

a- montrer que $\vec{u}(2,1,2)$ est un vecteur directeur de la droite (D), et que (6,-6,-3) est le triplet de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}$

b- calculer $\dfrac{\left\|\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$, puis déduire que la droite (D) est tangente à la sphère (S)

EXERCICE 2

1- résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante $z^2-6z+25=0$

2- on considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$

Les points A, B , C et D d'affixes respectivement $a=3+4i$, $b=3-4i$, et $c=2+3i\quad et\quad d=5+6i$

a- calculer $\dfrac{d-c}{a-c}$, puis déduire que les points A, C, D sont alignés

b- montrer que $p=3+8i$ est l'affixe du point P l'image du point A par l'homothétie h de centre B et de rapport $\dfrac{3}{2}$

c- écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $\dfrac{d-p}{a-p}$, puis déduire que $\dfrac{\pi}{4}$ est la mesure de l'angle $\overline{\left(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PD}\right)}$, et que $PA=\sqrt{2}\,PD$

EXERCICE 3

Une caisse contient 2 boules blanches, et 7 boules noires (indiscernable au toucher)

On tire successivement et sans remise 2 boules de la caisse

2- soit X la variable aléatoire qui fait correspondre tout tirage au nombre de boules blanches restantes dans la caisse après avoir tiré les 2 boules

1- déterminer les valeurs prises par la variable aléatoire X

2- montrer que: $P(X=0)=\dfrac{1}{36}\quad et\quad P(X=1)=\dfrac{7}{18}$

3- déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X, et calculer l'espérance mathématique E(X)

EXERCICE 4

Soit (u_n) une suite définie par: $u_0 = 0 \ et \ (\forall n \in \mathbb{N}) \ \ u_{n+1} = \dfrac{1+4u_n}{7-2u_n}$

1- vérifier que: $(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ 1-u_{n+1} = \dfrac{6(1-u_n)}{5+2(1-u_n)}$, puis montrer par récurrence que

$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1-u_n > 0$

2- on pose $(\forall n \in \mathbb{N}) \ \ v_n = \dfrac{2u_n - 1}{u_n - 1}$

a- montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{5}{6}$, puis écrire v_n en fonction de n

b- montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = \dfrac{\left(\dfrac{5}{6}\right)^n - 1}{\left(\dfrac{5}{6}\right)^n - 2}$, et déduire la limite de (u_n)

EXERCICE 5

1- déterminer sur $\mathbb{R}$ les fonctions primitives de la fonction $x \mapsto 2x(x^2-1)^{2009}$, et vérifier que: $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} 2x(x^2-1)^{2009}dx = \frac{1}{2010}$

2- en utilisant l'intégration par partie, montrer que $\displaystyle\int_0^2 (2x+1)\ln(x+1)\,dx = 6\ln 3 - 2$

EXERCICE 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = x\left(\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)$ et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1-a- vérifier que: $(\forall x \in \mathbb{R}) \ \ f(x) = x\left(\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}\right)$

b- montrer que f est paire, et que $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) - x = \dfrac{-2xe^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

c- montrer que: $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, et que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{-2x\,e^{-2x}}{1+e^{-2x}} = 0$, puis déduire que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$

2-montrer que la courbe (C) se trouve au dessous de la droite (D) dans l'intervalle $\left[0, +\infty\right[$

3-a- montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R}) \ f'(x) = \dfrac{e^{4x} - 1 + 4xe^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$, vérifier que $f'(0) = 0$

b- montrer que: $\left(\forall x \in \left[0,+\infty\right[\right) \quad e^{4x}-1 \geq 0$, puis déduire que

$\left(\forall x \in \left[0,+\infty\right[\right)\ e^{4x}-1+4x\,e^{2x} \geq 0$

c- donner le tableau de variation de f sur $\left[0,+\infty\right[$

4- construire la courbe (C) (on admet que la courbe (C) admet deux points d'inflexion qu'on n'est pas obligé de déterminer)