

EXAMEN 2 BAC SCIENCE EX 2008

BAC (JUIN 2008)

EXERCICE 1

1- résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante $z^2 - 6z + 34 = 0$

2- on considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

Les points A, B et C d'affixes respectivement $a = 3 + 5i$, $b = 3 - 5i$, et $c = 7 + 3i$

Soit z l'affixe du point M du plan et z' l'affixe du point M' l'image du point M par la translation T de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $u = 4 - 2i$

a- montrer que: $z' = z + 4 - 2i$, puis vérifier que le point C est l'image du point A par la translation T

b- montrer que $\frac{b - c}{a - c} = 2i$

c- déduire que le triangle ABC est rectangle et que $BC = 2AC$

EXERCICE 2

On considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les points

$A(0, -1, 1)$ et $B(1, -1, 0)$ et la sphère (S) d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z + 2 = 0$

1- montrer que le centre de la sphère (S) est le point $\Omega(1, 0, 2)$ et de rayon $\sqrt{3}$, et vérifier que le point A appartient à (S)

2- déterminer le triplet des coordonnées du vecteur $\vec{OA} \wedge \vec{OB}$, et montrer que $x + y + z = 0$ est l'équation cartésienne du plan (OAB)

3- montrer que le plan (OAB) est tangent à la sphère (S) au point A

EXERCICE 3

Une caisse contient 6 boules rouges, et 3 boules vertes (indiscernables au toucher)

1- on tire simultanément 3 boules de la caisse

a- calculer la probabilité d'obtenir 2 boules rouges et une boule verte

b- montrer que la probabilité d'obtenir au moins une boule verte est $\frac{16}{21}$

2- on considère dans cette question l'expérience suivante: on tire successivement et sans remise 3 boules de la caisse, calculer la probabilité d'obtenir 3 boules rouges

EXERCICE 4

I – soit g une fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = x - 2 \ln x$

1- a- calculer $g'(x)$ pour tout x de l'intervalle $]0, +\infty[$

b- montrer que g est décroissante sur $]0, 2]$ et croissante sur $[2, +\infty[$

2- déduire que: $(\forall x \in]0, +\infty[) \quad g(x) > 0$ (remarquer que $g(2) > 0$)

II – on considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par: $f(x) = x - (\ln x)^2$ et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1- calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat

EXAMEN 2 BAC SCIENCE EX 2008

2-a-montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ (on pose $X = \sqrt{x}$, on rappelle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$)

b- déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ (remarque: $f(x) = x \left(1 - \frac{(\ln x)^2}{x} \right)$)

c- calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$, puis déduire que la courbe (C) admet , au voisinage de $+\infty$, un

branche parabolique de direction la droite (Δ) d'équation $y = x$

d- montrer que la courbe (C) se trouve au dessous de la droite (Δ)

3-a- montrer que: $(\forall x \in]0, +\infty[) f'(x) = \frac{g(x)}{x}$, et montrer que f est strictement

croissante sur $]0, +\infty[$

b- donner le tableau de variation de f

c- montrer que la droite $y = x$ est l'équation de la tangente de la courbe (C) au point d'abscisse (1)

4- montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans $]0, +\infty[$ et

$\frac{1}{e} < \alpha < \frac{1}{2}$ (on admet $(\ln 2)^2 < \frac{1}{2}$)

5- construire la courbe (C) et la droite (Δ) (on admet que $I(e, e - 1)$ est un point d'inflexion de la courbe (C) , on prend $e \simeq 2,7$)

6-a- montrer que: $H : x \mapsto x \ln x - x$ est une primitive de la fonction $\ln : x \mapsto \ln x$ sur

l'intervalle $]0, +\infty[$, puis montrer que $\int_1^e \ln x \, dx = 1$

b- en utilisant l'intégration par partie, montrer que: $\int_1^e (\ln x)^2 \, dx = e - 2$

c- calculer l'aire de la surface limitée par la courbe (C), la droite (Δ) et les droites d'équation $x = 1$ et $x = e$

III – on considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = f(u_n)$

1- montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 \leq u_n \leq 2$ (utiliser la réponse de la question II – 3 – a)

2- montrer que la suite (u_n) est décroissante

3- déduire que la suite (u_n) est convergente, puis calculer sa limite

EXAMEN 2 BAC SCIENCE EX 2008

BAC (JUILLET 2008)

EXERCICE 1

1- résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante $z^2 - 8z + 17 = 0$

2- on considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

Les points A, B d'affixes respectivement $a = 4 + i$, $b = 8 + 3i$

Soit z l'affixe du point M du plan et z' l'affixe du point M' l'image du point M par la rotation

R de centre Ω d'affixe $\omega = 1 + 2i$ et d'angle $\frac{3\pi}{2}$

a- montrer que: $z' = -iz - 1 + 3i$

b- vérifier que l'affixe du point C l'image du point A par la rotation R est $c = -i$

b- montrer que $b - c = 2(a - c)$

c- déduire que les points A, B et C sont alignés

EXERCICE 2

On considère dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le plan (P)

d'équation $x + 2y + z - 1 = 0$, et la sphère (S) d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 2z + 5 = 0$$

1- montrer que le centre de la sphère (S) est le point $I(2, 3, -1)$ et de rayon 3

2-a- montrer que la distance du point I au plan (P) est $\sqrt{6}$

b- déduire que le plan (P) coupe la sphère (S) selon un cercle (Γ) de rayon $\sqrt{3}$

3-a- déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) qui passe par I et perpendiculaire au plan (P)

b- montrer que le centre du cercle (Γ) est le point $H(1, 1, -2)$

EXERCICE 3

Une caisse contient 4 boules blanches, et 3 boules rouges (indiscernables au toucher)

on tire successivement et sans remise 3 boules de la caisse

1- calculer la probabilité d'obtenir 3 boules blanches

2- montrer que la probabilité d'obtenir 3 boules de mêmes couleurs est $\frac{1}{7}$

3- calculer la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche

EXERCICE 4

Soit (u_n) une suite définie par: $u_0 = 2$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = \frac{5u_n}{2u_n + 3}$

1-montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 1$

2- on pose: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$

a- montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{3}{5}$, puis calculer v_n en fonction de n

b- montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n = \frac{2}{2 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}$, puis calculer la limite de la suite (u_n)

EXERCICE 5

I – soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{2x} - 2x$

1- calculer $g'(x)$ pour tout x de l'intervalle $\mathbb{R}$

b- montrer que g est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$

2- déduire que: $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g(x) > 0$ (remarquer que $g(0) = 1$)

II – on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = \ln(e^{2x} - 2x)$ et soit (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1- a- montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

b- vérifier que: $(\forall x \in \mathbb{R}^*) \quad \frac{f(x)}{x} = \left(\frac{e^{2x}}{x} - 2 \right) \frac{\ln(e^{2x} - 2x)}{e^{2x} - 2x}$

c- montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, (utiliser $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$)

d- déduire que la courbe (C) admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique, déterminer sa direction

2-a- vérifier que: $(\forall x \in [0, +\infty[) \quad 1 - \frac{2x}{e^{2x}} > 0$ et $f(x) = 2x + \ln\left(1 - \frac{2x}{e^{2x}}\right)$

b- déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (utiliser $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$)

c- montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x$ est une asymptote oblique de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$

d- montrer que: $(\forall x \in [0, +\infty[) \quad f(x) - 2x < 0$, et déduire que la courbe (C) se trouve au dessous de la droite (D) sur l'intervalle $[0, +\infty[$

3-a- montrer que: $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f'(x) = \frac{2(e^{2x} - 1)}{g(x)}$

b- étudier le signe de $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$, puis donner le tableau de variation de f

c- construire la droite (D) et la courbe (C) (on admet que la courbe (C) admet deux points d'inflexion)