

SUITES NUMERIQUES

1-SUITES ARITHMETIQUE

1-1-DEFINITION

Soit $(u_n)_n$ une suite numérique. On dit que $(u_n)_n$ est une suite arithmétique s'il existe un réel r tel que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n = r$, r est appelé la raison de la suite $(u_n)_n$

1-2-PROPRIETE

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison r , on a :

i- $(\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2) \quad u_n - u_p = (n - p)r$

ii- $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 2u_n = u_{n+1} + u_{n-1}$

iii- $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = u_0 + nr$

1-3-SOMME DE TERMES SUCCESSIFS D'UNE SUITE ARITHMETIQUE

PROPRIETE

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison r , pour tout entier naturel n et p tel que $n \geq p$

On a : $u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \frac{(n - p + 1)(u_n + u_p)}{2}$

1-4-EXERCICE

1- Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r tel que $u_7=5$ et $u_9=8$

a- déterminer u_0 et r

b- calculer u_n en fonction de n

c- déterminer n tel que $u_n=205/2$

d- calculer $u_7+u_8+\dots+u_{100}$

2- soit $(u_n)_n$ une suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n} \end{cases}$$

a- calculer u_1, u_2, u_3

b- montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 \leq u_n \leq 2$

c- soit $(v_n)_n$ une suite définie par : $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$

i- calculer v_0 ; et montrer que $(v_n)_n$ est une suite arithmétique en déterminant sa raison

ii- calculer v_n puis u_n en fonction de n

2-SUITE GEOMETRIQUE

2-1-DEFINITION

Soit p un entier naturel, on dit que la suite $(u_n)_n$ est géométrique si et seulement s'il existe un réel q tel que : $(\forall n \geq p) \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$, q est appelé la raison de la suite $(u_n)_n$

2-2-PROPRIETE

Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison q , on a :

i- $(\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2) \quad u_n = u_m q^{n-m}$

ii- $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n^2 = u_{n-1} u_{n+1}$

iii- $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = u_0 q^n$

SUITES NUMERIQUES

2-3-SOMME DE TERMES SUCCESSIFS D'UNE SUITE GEOMETRIQUE

PROPRIETE

Si $(u_n)_n$ est une suite géométrique de raison q , ($q \neq 1$) et p un entier naturel tel que $n \geq p$,

$$\text{alors : } u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = \frac{u_p - u_{n+1}}{1 - q}$$

2-4-EXERCICE

Soit $(u_n)_n$ une suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$$

1-calculer u_1, u_2

2-montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n < 3$

3- étudier la monotonie de la suite $(u_n)_n$, et montrer que $u_n \geq 2$

4- on considère la suite $(v_n)_n$ définie par : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n = u_n - 3$

a- montrer que $(v_n)_n$ est une suite géométrique en déterminant sa raison

b- calculer v_n puis u_n en fonction de n

c- calculer $\sum_{k=0}^n v_k$ puis $\sum_{k=0}^n u_k$

3-LIMITE D'UNE SUITE

3-1-LIMITE FINIE D'UNE SUITE

DEFINITION

on dit que la limite d'une suite $(u_n)_n$ est le réel L si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$

3-2-LIMITE INFINIE D'UNE SUITE

Soit $(u_n)_n$ une suite numérique, on dit que la limite de la suite $(u_n)_n$ est $\pm\infty$ si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm\infty$$

3-3-LIMITE DE SUITES DE REFERENCES

PROPRIETE

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 1, on a :

$$\text{i- } \lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} = +\infty$$

$$\text{ii- } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 0$$

4-CONVERGENCE D'UNE SUITE

4-1-DEFINITION

Soit $(u_n)_n$ une suite numérique

i- on dit que $(u_n)_n$ est une suite convergente si : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L; L \in \mathbb{R}$

ii- on dit que $(u_n)_n$ est divergente si, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \pm\infty$ ou $(u_n)_n$ n'admet pas de limite

4-2-EXERCICE

Calculer la limite de $(u_n)_n$ au voisinage de $+\infty$

$$\text{i- } u_n = \frac{3n^2 - 1}{n + 3} \quad ; \quad u_n = \frac{3n - 4}{n^3 + 2n}$$

SUITES NUMERIQUES

ii- $u_n = \sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 + 3n} \quad ; \quad u_n = (-1)^n$

4-3- PROPRIETE

Soit $(u_n)_n$ une suite numérique et L un réel, on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - L| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = L$

EXERCICE

Soit $(u_n)_n$ une suite numérique définie par : $u_n = 4 + \frac{(-1)^n}{n}$; calculer la limite de u_n

5-CRITERE DE CONVERGENCE

5-1-PROPRIETE

Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites numériques , L et α deux réels tel que $\alpha > 0$

Si $(\forall n \geq p) \quad |v_n - L| \leq \alpha u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L$

5-2-THEOREME DES GENDARMES

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites numériques, on a :

Si $(\forall n \geq p) \quad u_n \leq v_n \leq w_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = L$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = L$

5-3-PROPRIETE

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques, $\alpha > 0$

i- Si $(\forall n \geq p) \quad v_n \geq \alpha u_n$ et , alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

ii- Si $(\forall n \geq p) \quad v_n \leq \alpha u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$

5-4-PROPRIETE

i- Si (u_n) est une suite croissante majorée, alors elle est convergente

ii- Si (u_n) est une suite décroissante minorée, alors elle est minorée

5-5- EXERCICE

1- soit $u_n = 3 + \frac{\cos n}{n}$, étudier la convergence de $(u_n)_n$

2- soit $u_n = \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n}$

a- montrer que : $\frac{n^2}{n^2 + n} \leq u_n \leq \frac{n^2}{n^2 + 1}$

b- étudier la convergence de $(u_n)_n$

3- soit $u_n = 3n + 4 \cos n$, étudier la convergence de $(u_n)_n$

4- soit $u_n = -4n + 5 \sin n$, étudier la convergence de $(u_n)_n$

5-6-PROPRIETE

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, tel que $f(I) \subset I$, et soit une suite

$(u_n)_n$ définie par $u_p \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Si $(u_n)_n$ est convergente, alors sa limite L est la solution de l'équation $f(x) = x$

EXERCICE

soit $(u_n)_n$ une suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12} \end{cases}$$

a- montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq u_n \leq 4$

b- étudier la monotonie de $(u_n)_n$, et déduire qu'elle est convergente

c- calculer la limite de u_n

6-SUITES PARTICULIERES

6-1-PROPRIETE

Soit $(u_n)_n$ une suite définie par : $u_n = a^n$

i- si $-1 < a < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$

ii- si $a > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$

iii- si $a \leq -1$ alors la suite $(u_n)_n$ n'admet pas de limite

iv- si $a=1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 1$

6-2-PROPRIETE

Soit $(u_n)_n$ une suite définie par : $u_n = n^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{Q}^*$

i- si $\alpha > 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty$

ii- si $\alpha < 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = 0$

6-3-EXERCICE

EXERCICE 1

calculer la limite de la suite $(u_n)_n$ dans les cas suivants :

$$1- u_n = \frac{-1}{3^n} ; \quad u_n = -3 \left(\frac{4}{3} \right)^n$$

$$2- u_n = \frac{2^n - 3^n}{3^n} ; \quad u_n = \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n} ; \quad u_n = n^{\frac{2}{3}} - n^{\frac{3}{4}}$$

EXERCICE 2

$$\text{soit } (u_n)_n \text{ une suite définie par : } \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} \end{cases}$$

1- montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 2 < u_n < 4$

2- étudier la monotonie de $(u_n)_n$, puis déduire qu'elle est convergente

3- montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 4 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(4 - u_n)$

4- déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N})$, puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

5- on pose : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n = \frac{u_n - 4}{u_n - 2}$

a- montrer que $(v_n)_n$ est une suite géométrique en déterminant sa raison q

b- calculer v_n puis u_n en fonction de n

c- en déduire la limite de u_n

SUITES NUMERIQUES

f- on pose : $S_n = v_0 + \dots + v_{n-1} \quad (\forall n \geq 1)$, calculer S_n en fonction de n, puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

EX1

Soit (u_n) une suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2}{5} u_n + 1 \end{cases}$$

1- montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{5}{3} \leq u_n \leq 2$$

2- étudier la monotonie de (u_n)

3- on considère la suite (v_n) définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n = u_n - \frac{5}{3}$$

a- montrer que (v_n) est une suite géométrique

b- calculer v_n puis u_n en fonction de n

c- calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$ en fonction de n ,

puis calculer la limite de S_n

EX2

Soit (u_n) une suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2} \end{cases}$$

1- montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq u_n \leq 1$$

2- étudier la monotonie de (u_n)

3- déduire que (u_n) est convergente, et calculer sa limite

4- on considère la suite (v_n) définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$$

a- montrer que (v_n) est une suite géométrique

b- calculer v_n puis u_n en fonction de n

c- calculer la limite de u_n

EX3

Soit (u_n) une suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n + 3}{2}} \end{cases}$$

1- montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \frac{1}{2} \leq u_n \leq \frac{3}{2}$$

2- étudier la monotonie de (u_n)

3- déduire que (u_n) est convergente, et calculer sa limite

EX4

Soit (u_n) une suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4} u_n + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} \right)^n \end{cases}$$

on considère la suite (v_n) définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_n = u_n - \left(\frac{3}{4} \right)^n$$

1- calculer u_1 et v_0

2- montrer que (v_n) est une suite

géométrique de raison $\frac{1}{4}$

3- calculer v_n puis u_n en fonction de n

4- calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$ en fonction de n ,

puis calculer la limite de S_n

EX5

Soit $(u_n)_n$ une suite définie par :

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{nu_n + 1}{n+1} \end{cases}$$

- 1- montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n < 1$
- 2- étudier la monotonie de $(u_n)_n$, et déduire qu'elle est convergente
- 3- on pose $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad v_n = nu_n$
 - a- montrer que (v_n) est une suite arithmétique
 - b- calculer v_n puis u_n en fonction de n
 - c- calculer la limite de u_n
- 5- montrer que si $u_1 = 1$, alors la suite (u_n) est une suite constante

EX6

Soit $(u_n)_n$ une suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -1, & u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \end{cases}$$

- 1- calculer u_2 et u_3
- 2- on considère les suites (a_n) et (b_n) définies par: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$ et $b_n = 2^n u_n$
 - a- montrer que (a_n) est une suite géométrique, et calculer a_n en fonction de n
 - b- montrer que (b_n) est une suite arithmétique, et calculer b_n en fonction de n
 - c- calculer u_n en fonction de n
- 3-a- montrer par récurrence que:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad \left(\frac{3}{2}\right)^n \geq n$$

- b- calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^n}$, puis de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

EX7

Soit (u_n) une suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}(u_n^2 + 1) \end{cases}$$

- 1- montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq u_n \leq 1$
- 2- étudier par récurrence la monotonie de (u_n)
(utiliser les variations de $f(x) = \frac{1}{5}(x^2 + 1)$ sur l'intervalle $[0, 1]$)
- 3- déduire que (u_n) est convergente, et calculer sa limite

EX8

Soient $(u_n)_n$ et (v_n) deux suites

$$\begin{cases} u_0 = 3, & v_0 = 5 \\ \text{définies par : } u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

- 1- montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont positives
- 2- montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{(v_n - u_n)^2}{2(u_n + v_n)}$
puis étudier la monotonie de (u_n) et (v_n)
- 3- on pose $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad w_n = v_n - u_n$
 - a- montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq w_{n+1} \leq \frac{1}{2}w_n$
 - b- montrer par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq w_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
 - c- déduire que (w_n) est convergente
- 4- montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite
- 5- calculer $u_{n+1} \times v_{n+1}$, puis déduire les limites de (u_n) et (v_n)

--	--

--	--

