1-LES FONCTIONS PRIMITIVES D'UNE FONCTION

1-1-FONCTION PRIMITIVE SUR UN INTERVALLE

1-1-1-DEFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, on appelle fonction primitive de f sur I, toute fonction F dérivable sur I, tel que sa dérivée est f : $\forall x \in I \qquad F'(x) = f(x)$

1-1-2-EXEMPLE

Soit $f(x) = x + 1$, une primitive de f est $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$

1-1-3-PROPRIETE

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, F sa primitive sur I. les fonctions primitives de f sur I sont les fonctions G définies sur I par : $G(x) = F(x) + k$ où k est un réel

EXEMPLE

Soit $f(x) = x + 1$, sa primitive $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$, toute primitive G de f s'écrit

$G(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + k$ où k est un réel

1-1-4-PROPRIETE

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, x_0 un élément de I et y_0 un réel. Si f admet une primitive sur I, alors il existe une primitive G unique de f sur I telle que $G(x_0) = y_0$

EXEMPLE

On a $G(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + k$ une primitive de $f(x) = x + 1$, déterminons G telle que

$G(2) = -1$ d'où on a $G(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 5$

1-1-5-PROPRIETE

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une fonction primitive sur I

1-2-OPERATIONS SUR LES FONCTIONS PRIMITIVES

1-2-1-PROPRIETE

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I, k un réel. Si F et G sont les primitives respectives de f et g sur I, alors

i- la fonction F+G est la primitive de f+g sur I

ii- la fonction kF est la primitive de kf sur I

1-2-2-EXEMPLE

Soit $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$ sa primitive est $F(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x$

2-PRIMITIVE DES FONCTIONS USUELLES

2-1-PROPRIETE

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et F sa primitive sur I on a :

f(x)=	F(x)=	I=
$a \qquad a \in \mathbb{R}$	$ax + k$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{x^2}{2} + k$	$\mathbb{R}$
$x^n \qquad n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + k$	$\mathbb{R}$

$\frac{1}{x^2}$	$\frac{-1}{x}+k$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+k$	$]0,+\infty[$
$x^r \qquad r\in\mathbb{Q}- \;\; -1$	$\frac{x^{r+1}}{r+1}+k$	$]0,+\infty[$
$\sin x$	$-\cos x+k$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x+k$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert+k$	$\mathbb{R}^*$
e^x	e^x+k	$\mathbb{R}$
$1+\tan^2 x$	$\tan x+k$	$]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

2-2-EXERCICE

Calculer les primitives de f dans les cas suivants

i- $f(x)=4x^3-\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{5}{x}-6e^x+12$

ii- $f(x)=2\sin x-5\cos x+9$

3-OPERATIONS ET FONCTIONS PRIMITIVES

3-1-PROPRIETE

Soient f une fonction définie sur un intervalle I, u une fonction dérivable sur I, et F la primitive de f sur I, on a

f(x)=	F(x)=	I=
$u'(x)\cdot u^n(x)$	$\frac{u^{n+1}(x)}{n+1}+k$	Df
$\frac{u'(x)}{u^2(x)}$	$-\frac{1}{u(x)}+k$	Df
$u'(x)\cdot u^r(x) \qquad r\in\mathbb{Q}\setminus \;\; -1$	$\frac{u^{r+1}(x)}{r+1}+k$	Df
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)}+k$	Df
$u'(ax+b)$	$\frac{1}{a}u(ax+b)+k$	Df
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert+k$	Df
$u'(x)\cdot e^{u(x)}$	$e^{u(x)}+k$	Df

3-2-EXEMPLE

Calculons les primitives de f dans les cas suivants

$$f(x)=\frac{2x}{x^2+1} \qquad ; \qquad f(x)=\frac{3x}{x^2-2\;^{2}}$$

3-3-EXERCICE

Calculer les primitives de f dans les cas suivants

i- $f(x)=2x^4-5x^3+7x^2-x+3$; $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{2}{x^2}$

ii- $f(x)=3\sin x+2\cos x$; $f(x)=\sin^3 x=\sin x(1-\cos^2 x)$

iii- $f(x)=\dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+3}}$; $f(x)=\dfrac{3}{2x+1}$; $f(x)=xe^{x^2+1}$

4-INTEGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE SUR UN INTERVALLE

4-1-DEFINITION

Soit f une fonction continue sur un intervalle [a,b], F sa primitive sur [a,b]. Le nombre réel $F(b)-F(a)$ est appelé l'intégrale de f de a vers b de $f(x)dx$, et on écrit

$$\int_a^b f(x)dx=\left[F(x)\right]_a^b=F(b)-F(a)$$

4-2-EXEMPLE

Soit $f(x)=x^2-3x$; $F(x)=\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{3}{2}x^2$

4-3-RESULTAT

i- si f est dérivable sur [a,b], telle que f' est continue sur [a,b], alors :

$$\int_a^b f'(x)dx=\left[f(x)\right]_a^b=f(b)-f(a)$$

ii- Pour tout réel k, on a : $\int_a^b k\cdot dx=\left[k\cdot x\right]_a^b=k(b-a)$

iii- Soit f une fonction continue sur [a,b],on a :

$$\int_a^a f(x)dx=0 \qquad et \qquad \int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$$

4-4-RELATION DE CHASLES-LINEARITE DE L'INTEGRALE

4-4-1-PROPRIETE

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, a,b et c des éléments de I et k un réel, on a :

i- $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

ii- $\int_a^b (f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

iii- $\int_a^b k\cdot f(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$

4-4-2-EXEMPLE

Calculons l'intégrale suivant : $I=\int_1^3 \left|x-2\right|dx$

4-4-3-EXERCICE

1- On pose $A=\int_1^e \left(\dfrac{1}{t}+\ln t\right)dt$ et $B=\int_1^e\left(1+\ln\dfrac{1}{t}\right)dt$; calculer A+B

2- on pose $I=\int_0^\pi \cos^2(x)dx$ et $J=\int_0^\pi \sin^2(x)dx$

a- calculer I+J et I-J ; b- déduire les valeurs de I et J

5- INTEGRALE ET ORDRE

5-1-PROPRIETE

Soient deux fonctions continues sur un intervalle I, a et b deux éléments de I.

i- $si \quad a \leq b \quad et \quad f \geq 0$ sur [a,b] alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

ii- si $a \leq b$ et $f(x) \leq g(x)$ sur [a,b] alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

5-2-EXERCICE

1- soient f et g deux fonctions continues sur [-1,4], telles que

$-1 \leq f(x) \leq 3 \quad et \quad -2 \leq g(x) \leq 1$

a- trouver un encadrement de $f(x)+g(x)$ et de $2f(x)-3g(x)$

b- déduire un encadrement de $\int_{-1}^4 (f(x)+g(x))dx$ et de $\int_{-1}^4 (2f(x)-3g(x))dx$

2- on considère la fonction $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

a- montrer que : $\forall x \geq 1 \qquad \dfrac{1}{2x^2} \leq f(x) \leq \dfrac{1}{x^2}$

b- déduire un encadrement de $I=\int_1^2 f(x)dx$

6-LA VALEUR MOYENNE

6-1-PROPRIETE ET DEFINITION

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, a et b deux réels de I, tels que $a<b$; il existe un réel c de [a,b] tel que : $f(c)=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$. Le nombre réel $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ est appelé la valeur moyenne de f sur l'intervalle [a,b]

6-2-EXERCICE

1- calculer l'intégrale suivant $A=\int_1^e \dfrac{\ln^2(x)}{x}dx$

2- déterminer la valeur moyenne de la fonction $f(x)=\dfrac{\ln^2(x)+x}{x}$ sur l'intervalle [1,e]

7-L'INTEGRATION PAR PARTIES

7-1-PROPRIETE

Soient u et v deux fonctions dérivables sur [a,b], telles que u' et v' sont continues sur [a,b], on a : $\int_a^b u'(x)\cdot v(x)dx = \left[u(x)\cdot v(x)\right]_a^b - \int_a^b u(x)\cdot v'(x)dx$

Cette forme est appelée intégration par parties

7-2-EXEMPLE

Utilisons l'intégration par partie pour calculer l'intégrale suivant : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\cos(x)dx$

7-3-EXERCICE

1-en utilisant l'intégration par parties, calculer les intégrales suivants

$A=\int_1^2 \ln(x)dx \qquad et \qquad B=\int_1^e x\ln(x) \qquad ,C=\int_1^2 x\cdot e^x dx$

2- posons $I=\int_0^\pi e^x\cdot\cos^2(x)dx \qquad et \qquad J=\int_0^\pi e^x\cdot\sin^2(x)dx$

a- calculer $I+J \quad et \qquad I-J$

b- en déduire les valeurs de I et J

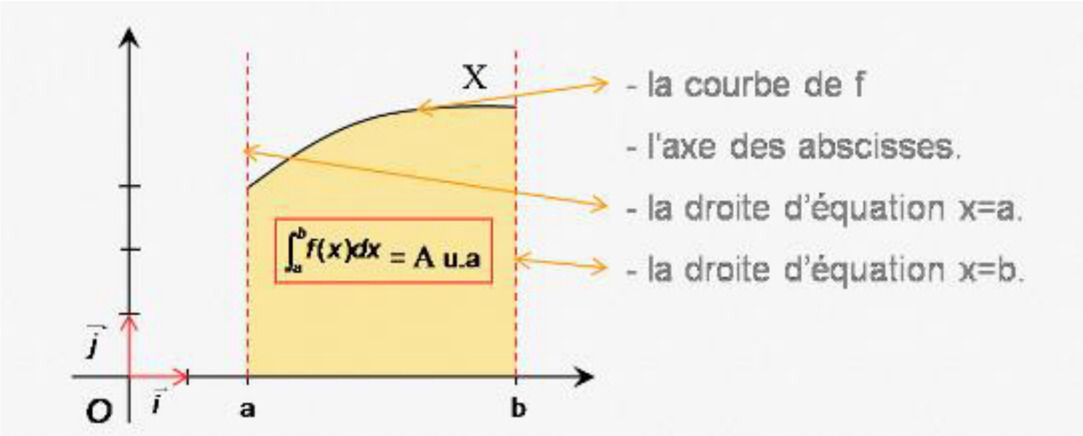
8- CALCUL DES AIRES ET DES VOLUMES

8-1- CALCUL DES AIRES

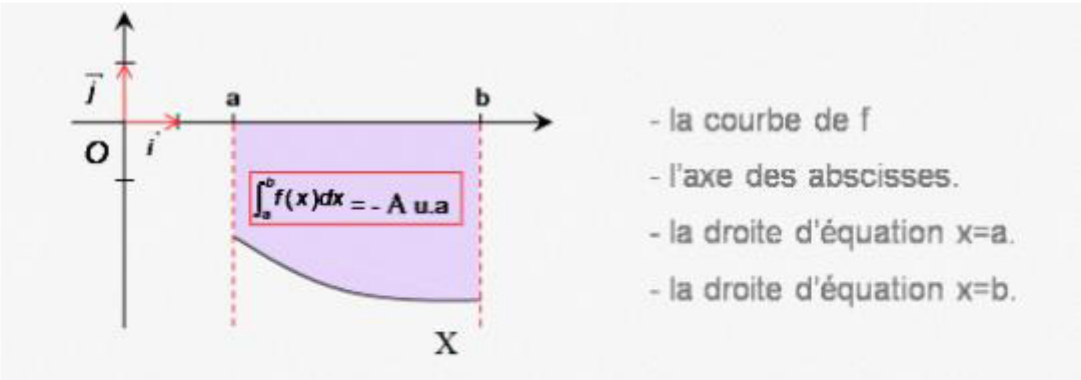
8-1-1-PROPRIETE

Soit f une fonction continue sur [a,b]. Soit A l'aire de la surface située entre la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation x=a et x=b.

i- si f est positive sur [a,b], alors $A=\int_a^b f(x)dx \cdot ua$, ua= unité d'aire tel que $ua=\left\|\vec{i}\right\| \cdot \left\|\vec{j}\right\|$



ii- si f est négative sur [a,b], alors $A=-\int_a^b f(x)dx \cdot ua$



8-1-2-PROPRIETE

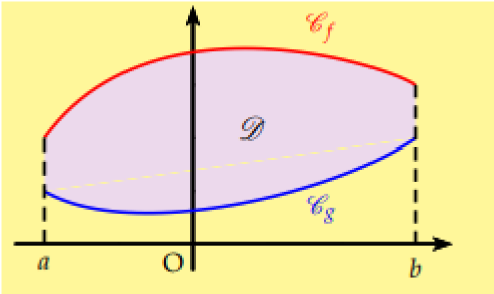
Soit f une fonction continue sur [a,b]. L'aire de la surface du plan située entre la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites x=a et x=b est le nombre réel : $A=\int_a^b \left|f(x)\right|dx.ua$

8-1-3-EXEMPLE

Soit $f(x)=x^2-2x$ calculer l'aire limitée par C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation x=0 et x=3

8-1-4-PROPRIETE

Soient f et g deux fonctions continues sur [a,b]. C_f et C_g les courbes de f et g. L'aire de la surface située entre les courbes de f et g, les droites d'équation x=a et x=b, est le nombre réel $A=\int_a^b \left|f(x)-g(x)\right|dx.ua$



EXEMPLE

Soient $f(x) = x^2 - 2x$ et $g(x) = x$

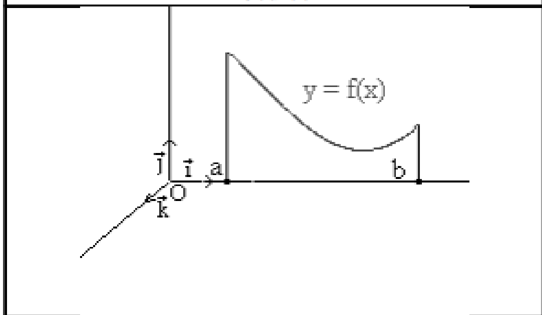
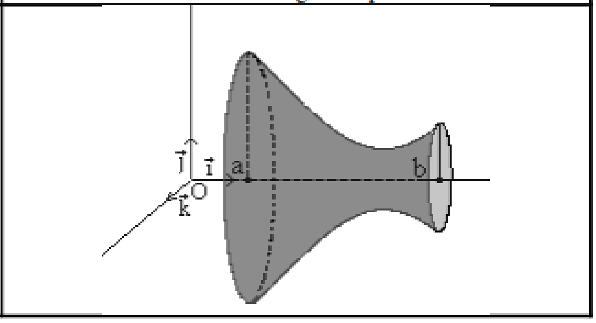
8-2-CALCUL DES VOLUMES

8-2-1-PROPRIETE

L'espace est muni d'un repère orthonormé $O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

Soit f une fonction continue sur un intervalle [a,b] , en faisant pivoter la courbe C_f autour de l'axe des abscisses , on engendre un solide de révolution, dont le volume est

$V = \int_a^b \pi . f^2(x)dx.uv$, uv unité de volume avec $uv = \|\vec{i}\|\|\vec{j}\|\|\vec{k}\|$

Courbe	Solide de révolution engendré par cette courbe
	

8-2-2-EXEMPLE

Soit $f(x) = x + 1$

EXERCICE1

1-calculer les intégrales suivantes:

$$A = \int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx \quad , \quad B = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad , \quad C = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x + \tan^3 x)\, dx$$

2-calculer les intégrales suivantes en utilisant l'intégration par partie

$$D = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2x-1)\cos x\, dx \quad , \quad E = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad , \quad F = \int_0^1 x^2 e^{3x} dx$$

EXERCICE 2

1- a- montrer que $\frac{x}{\sqrt{1+x}} = \sqrt{x+1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}$

b- calculer l'intégrale suivante: $I = \int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}}$

2-on considère la fonction $f(x) = \frac{2x^2 + 8x + 5}{(x+2)^2}$

i- déterminer les réels a et b tels que $f(x) = a + \frac{b}{(x+2)^2}$

ii- calculer l'intégrale suivant : $J = \int_0^2 f(x)dx$

EXERCICE 3

A- Soit g la fonction définie sur $\left]0,+\infty\right[$ par: $g(x) = e^x - \ln(e^x - 1)$

1- calculer $g'(x)$

2- donner le tableau de variation de g, puis déduire que $\forall x \in \left]0,+\infty\right[\quad g(x) > 0$

B- Soit f une fonction définie par: $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}\ln(e^x - 1)$

1-déterminer D_f

2- montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \ et \ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

3-montrer que $\forall x \in D_f \quad f'(x) = \frac{e^x}{(e^x - 1)^2} g(x)$, puis donner le tableau de variation de f

4-a- montrer que $\forall x \in D_f \quad f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}\left[x + \ln\left(1 - \frac{1}{e^x}\right)\right]$

b- montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x = 0$,puis déduire l'asymptote oblique de (C_f) au voisinage de $+\infty$

c- déterminer le point d'intersection de la courbe (C_f) et l'axe des abscisse

d- tracer la courbe (C_f)

5- soit α un réel tel que $0 < \alpha < \ln 2$

a- calculer la surface $A(\alpha)$ la partie du plan limitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = \alpha \ et \ x = \ln 2$

b- calculer $\lim\limits_{x \to 0^+} A(\alpha)$

EXERCICE 4

$I -$ Soit g une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $g(x) = (x-1)e^x + 1$

1- calculer $g'(x)$, puis donner le tableau de variation de g

2- déduire que $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) \geq 0$

$II -$ Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = (2x-3)e^{2x} + 4e^x - 1$

1- calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \ et \ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

2- étudier les branches infinies de la courbe (C_f)

3- a- montrer que $f'(x) = 4e^x g(x)$

b- donner le tableau de variation de f

4- tracer la courbe (C_f) dans un repère orthonormé $O,\vec{i},\vec{j}$ $où$ $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\,cm$

5- a- vérifier que la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par: $H(x) = (x-2)e^{2x} + 4e^{x}$ est une primitive de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par: $h(x) = (2x-3)e^{2x} + 4e^{x}$

b- calculer l'aire de la surface limitée par la courbe (C_f) et les droites d'équations $y=-1$, $x=0$, $x=-\ln 2$

EXERCICE 5

Soit f une fonction définie par $f(x) = \left(1-\dfrac{1}{x}\right)e^{x}$

1- déterminer D_f , puis calculer les limites de f aux bornes de D_f

2- a- calculer $f'(x)$

b- donner le tableau de variation de f

3- étudier les branches infinies de la courbes (C_f)

4- a- montrer que: $\forall x \in \mathbb{R}^{*}$ $\quad f''(x) = \dfrac{(x-1)(x^2+2)}{x^3}e^{x}$

b- étudier la concavité de la courbe (C_f)

c- déterminer l'équation de la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse (1)

d- tracer la courbe (C_f) dans un repère orthonormé $O,\vec{i},\vec{j}$ $où$ $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1\ cm$

5- Soit F une fonction définie sur $\mathbb{R}^{*}$ par: $F(x) = \left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x}\right)e^{2x}$

a- calculer $F'(x)$

b- calculer le volume du solide généré par la révolution autour de l'axe des abscisses de la courbe (C_f) comprise entre $x=1\ et\ x=2$

EXERCICE 6

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par: $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1+x)^n}\,dx$

1- calculer I_0 , I_1 , I_2

2- calculer I_n en fonction de n pour tout $n \geq 3$

3- en déduire la limite de I_n

EXERCICE 7

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par: $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,dx$

1- calculer I_0 , I_1

2- montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

3- montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée

4- en déduire la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$

5- a- montrer que: $\forall x \in [0,1]$ $\quad \dfrac{1}{1+x^n} \geq 1-x^n$

b- montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1-\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq 1$

c- en déduire la limite de I_n