1-EQUATION DU SECOND DEGRE

1-1- L'EQUATION Z^2=a

a-PROPRIETE

Soit a un nombre réel non nul, la solution de l'équation $z^2 = a$ dans $\mathbb{C}$ est :

i- si $a > 0$ alors $z = \sqrt{a}$ ou $z = -\sqrt{a}$

ii- si $a < 0$ alors $z = i\sqrt{-a}$ ou $z = -i\sqrt{-a}$

b-EXERCICE

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : $z^2 = -4$; $z^4 = 4$

1-2-L'EQUATION : az^2+bz+c=0

a-DEFINITION

on appelle équation du second degré dans $\mathbb{C}$ à coefficients réels , toute équation qui s'écrit sous forme de : $az^2 + bz + c = 0$, où z est l'inconnue et a,b et c sont des réels donnés , avec $(a \neq 0)$

b-PROPRIETE

On considère dans $\mathbb{C}$,l'équation : $az^2 + bz + c = 0$; $\Delta = b^2 - 4ac$ discriminant de l'équation

i-si $\Delta > 0$ alors l'équation admet deux solutions distinctes : $z = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $z = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

ii- si $\Delta = 0$ alors l'équation admet une solution double $z = \dfrac{-b}{2a}$

iii- si $\Delta < 0$ alors l'équation admet deux solutions complexes : $z = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ ou $z = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

c-EXERCICES

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

1- $z^2 - z + 1 = 0$

2- $2z^2 + z + 3 = 0$

3- $(iz+1)^2 + 3 = 0$

4- $3(z+i)^2 + 2(z+i) + 1 = 0$

2-NOTATION EXPONENTIELLE D'UN NOMBRE COMPLEXE

2-1-DEFINITION

Tout nombre complexe z, de module r et d'argument θ , s'écrit sous forme : $z = re^{i\theta}$. Cette écriture est appelée notation exponentielle du nombre complexe z

2-2-PROPRIETE

Soient r et θ deux nombres réels .Si $r > 0$ et $z = re^{i\theta}$ alors $|z| = r$ et $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$

2-3-OPERATIONS SUR LA NOTATION EXPONENTIELLE

a-PROPRIETE

Soient $z = re^{i\alpha}$ et $z' = r'e^{i\alpha'}$, on a :

i- $z \times z' = rr'e^{i(\alpha+\alpha')}$ et $z^n = r^n e^{in\alpha}$

ii- $\frac{1}{z}=\frac{1}{r}e^{-i\alpha}$ et $\frac{z}{z'}=\frac{r}{r'}e^{i(\alpha-\alpha')}$

b-FORMULE D'EULER

Soit α un nombre réel, on a $\sin(\alpha)=\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$ et $\cos(\alpha)=\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$

Exemple

Calculons $\cos^2(x)$ en fonction de $\cos(2x)$

Calculons $\cos^3(x)$ en fonction de $\cos(3x)$ et $\cos(x)$

c-FORMULE DE MOIVRE

Soit α un réel et n un entier naturel, on a : $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos(n\alpha)+i\sin(n\alpha)$

Dem : on a $(e^{i\alpha})^n=e^{in\alpha}$

Exemple : calculons $\cos(2x)$ et $\cos(3x)$, utiliser $(\cos x+i\sin x)^2=\cos(2x)+i\sin(2x)$

2-4-EXERCICE

1-résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : $z^2-6z-12=0$; $z^2+2\sqrt{3}z+12=0$

2-on pose : $z_1=3+i\sqrt{3};$ $z_2=-\sqrt{3}+3i$

a- écrire z_1 *et* z_2 sous forme trigonométrique et exponentielle

b- représenter les points A, B et C d'affixes respectivement $z_1;$ $z_2;$ z_1+z_2 dans le plan complexe

c-quelle est la nature du quadrilatère OABC

3-a- résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante (E) : $z^2+2\sqrt{2}z+4=0$; soient z_1 et z_2 les solutions de l'équation (E) telle que $\mathrm{Im}(z_1)>0$

a- donner une forme trigonométrique et exponentielle à z_1 et z_2

b- on considère les points A, B et C dont les affixes respectivement sont $z_A=2$, z_1 et z_2

Soit I le milieu du segment [AB] et z_I son affixe

i- représenter les points A, B, C et I dans le plan complexe

ii-montrer que le triangle OAB est isocèle puis déduire la mesure de l'angle $\left(\vec{u},\overrightarrow{OI}\right)$

iii-calculer z_I puis $|z_I|$

iv- déduire de ce précède les valeurs de $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right);$ $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

3-ECRITURE COMPLEXE DE TRANSLATION, HOMOTHETIE, ROTATION

3-1-DEFINITION

1-L'écriture complexe de la translation t de vecteur $\vec{u}$ est : $t_{\vec{u}}(z)=z'\Leftrightarrow z'=z+z_{\vec{u}}$

2-L'écriture complexe de l'homothétie h de centre Ω et de rapport k est :

$h(z)=z'\Leftrightarrow z'-z_\Omega=k(z-z_\Omega)$

3- L'écriture complexe de la rotation r de centre Ω et d'angle α est :

$r(z)=z'\Leftrightarrow z'-z_\Omega=e^{i\alpha}(z-z_\Omega)$

EX1

1-résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $z^2-4z+29=0$

2- on considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $O,\vec{u},\vec{v}$, les points Ω ,A et B tels que leurs affixes respectifs sont :

$\omega=2+5i$ $\quad ,a=5+2i$ $\quad ,b=5+8i$

a- soit u le nombre complexe tel que $u=b-\omega$, montrer que $u=3+3i$ et que $\arg(u)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

b- déterminer l'argument de $\overline{u}$ (conjugué de u)

c- vérifier que : $\overline{u}=a-\omega$, puis déduire que $\Omega A=\Omega B$

d- on considère la rotation r de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$

i- déterminer l'expression complexe de la rotation r

ii-déterminer l'image de A par la rotation r

EX 2

1- résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation suivante $z^2+10z+26=0$

2-2- on considère dans le plan complexe (P) , les points Ω , A , B et C tels que leurs affixes respectifs sont :

$\omega=-3$ $\quad ,a=-2+2i$ $\quad ,b=-5+i$

$c=-5-i$

a- montrer que : $\frac{b-\omega}{a-\omega}=i$

b- déduire la nature du triangle ΩAB

3- soit T la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe $u=6+4i$

a- donner l'expression complexe de la translation T

b-soit D l'image de C par la translation T montrer que le point D a pour affixe: $d=1+3i$

c-montrer que : $\frac{b-d}{a-d}=2$, et déduire que A est le milieu de [BD]

EX 3

1- résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante $z^2-6z+25=0$

2- on considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $O,\vec{u},\vec{v}$, les points A, B, C et D tels que leurs affixes respectifs sont :

$a=3+4i$ $\quad ,b=3-4i$ $\quad ,c=2+3i$

$d=5+6i$

a-calculer $\frac{d-c}{a-c}$ et déduire que les points A,C et D sont alignés

b- soit h une homothétie de centre B et de rapport $k=\frac{3}{2}$, déterminer l'expression complexe de l'homothétie h

c- montrer que $p=3+8i$ est l'affixe du point P image du point A par l'homothétie h

d- écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $\frac{d-p}{a-p}$, puis déduire que $\left(\overrightarrow{PA},\overrightarrow{PD}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$ et que $PA=\sqrt{2}PD$

EX4

Soient a et b deux réels de $]0,\pi[$, écrire sous forme exponentielle les nombres complexes suivants:

$z_1=1+e^{ia}$, $z_2=1-e^{ia}$

$z_3=e^{ia}+e^{ib}$, $z_4=\frac{1+e^{ia}}{1+e^{ib}}$

EX5

Soit a un nombre complexe de module $|a|<1$

1- démontrer que pour tout z de $\mathbb{C}$:

$$1-\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2=\frac{\left(1-|a|^2\right)\left(1-|z|^2\right)}{|1-\bar{a}z|^2}$$

2- déterminer les nombres complexes z vérifiant: $\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|\leq 1$