EXERCICE

Soit f une fonction définie par: $f(x) = x\,e^{x} + \ln x$

et (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ tel que $\left\|\vec{i}\right\| = \left\|\vec{j}\right\| = 2\ cm$

1- déterminer le domaine de définition D_f

2-a- calculer la limite de f au voisinage de $+\infty$

b- calculer la limite de f à droite du point 0

3- étudier les branches infinies de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$

4-a- calculer f'(x)

b- donner le tableau de variation de f

c-tracer la courbe (C)

5-a-calculer les primitives des fonctions suivantes: $g(x) = x\,e^{x} \quad et \quad h(x) = \ln x$

Utiliser l'intégration par partie

b- calculer en cm^2 l'aire de la surface limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1 \ \ et \ \ x = \frac{1}{2}$

6-a- montrer que f admet une fonction réciproque définie dans un intervalle J qu'il faut déterminer

c- calculer $\left(f^{-1}\right)'(e)$

SOLUTION

1- déterminons le domaine de définition D_f

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} \,/\ \ x > 0\right\} = \left]0, +\infty\right[$

2-a- calculons la limite de f au voisinage de $+\infty$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\,e^{x} + \ln x = +\infty$, car $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,e^{x} = +\infty \ \ et \ \ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

b- calculer la limite de f à droite du point 0

on a $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x\,e^{x} + \ln x = -\infty$, car $\lim\limits_{x \to 0^+} x\,e^{x} = 0 \ \ et \ \ \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

3- étudions les branches infinies de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} + \frac{\ln x}{x} = +\infty$, car $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty \ \ et \ \ \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

La courbe (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$

4-a- calculons f'(x)

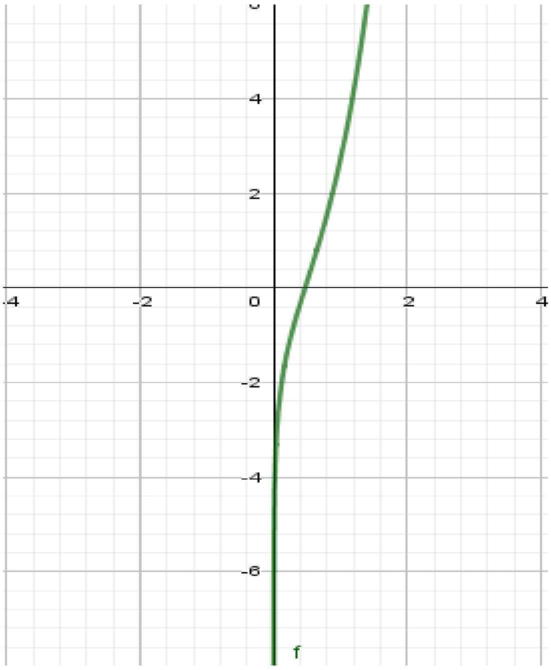
On a $f'(x) = (xe^{x})' + (\ln x)' = e^{x} + x\,e^{x} + \frac{1}{x}$

b- on a $\left(\forall x > 0\right) \quad e^{x} > 0 \quad et \quad \frac{1}{x} > 0$ donc $\left(\forall x > 0\right) \quad f'(x) > 0$

Le tableau de variation de f

x	0 $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
f'(x)	+
f(x)	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

c- La représentation graphique de f



5-a-calculons les primitives des fonctions suivantes: $g(x) = x\,e^{x} \quad et \quad h(x) = \ln x$

On a $G(x) = \int g(x)\,dx = \int x\,e^{x}dx = \left[x\,e^{x}\right] - \int e^{x}\,dx = x\,e^{x} - e^{x}$ est une primitive de g

Et $H(x) = \int \ln x\,dx = \left[x\ln x\right] - \int dx = x\ln x - x$ est une primitive de h

b- calculons en cm^2 l'aire de la surface limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1 \quad et \quad x = \frac{1}{2}$, on a

$$A = \left(\int_{\frac{1}{2}}^{1} \left|f(x)\right| dx\right) ua = \left(\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,dx\right)\ ua = \left(\int_{\frac{1}{2}}^{1} x\,e^{x}dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \ln x\,dx\right) ua$$

$$= \left(\left[x\,e^{x} - e^{x}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} + \left[x\ln x - x\right]_{\frac{1}{2}}^{1}\right) \times 4 \quad cm^2 = 2\left(e^{\frac{1}{2}} + \ln 2 - 1\right) \quad cm^2$$

6-a- montrons que f admet une fonction réciproque définie dans un intervalle J qu'il faut déterminer

La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left]0,+\infty\right[$, donc elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$

b- on a f(1)=e donc $\left(f^{-1}\right)'(e) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2e+1}$