1-FONCTION EXPONENTIELLE NEPERIENNE

1-1-DEFINITION

La fonction réciproque de la fonction ln est appelée fonction exponentielle népérienne, on la note exp, elle est définie par : $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in]0,+\infty[) \quad \ln y = x \Leftrightarrow y = e^x = \exp(x)$

1-2-RESULTAT

i- $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad e^x > 0$

ii- $\exp(1) = e^1 = e$ et $\exp(0) = e^0 = 1$

iii- $(\forall x \in]0,+\infty[) \quad e^{\ln x} = x$ et $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad \ln(e^x) = x$

iv- la fonction exp est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$

v- $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2) \quad e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$ et $\quad e^x > e^y \Leftrightarrow x > y$

1-3-PROPRIETE

Soient x, y et r des nombres réels, on a :

i- $e^x \times e^y = e^{x+y}$ et $\quad e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

ii- $\dfrac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$ et $\quad e^{rx} = (e^x)^r$

1-4-EXERCICE

1- résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

i- $e^{x^2+2x-3} = 1$; $\quad e^{2x+1} = \dfrac{1}{e^x}$; $\quad \dfrac{e^{2x+1}}{e^{x-3}} = e$; $e^x + e^{-x} = 2$

ii- $2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0$

2- résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes

i- $e^{1-x} \le e^{3x}$; $1 - e^{-x} < 0$; $\dfrac{2e^x - 3}{e^x - 2} < 0$

ii- $e^{2x} - 5e^x + 6 > 0$

SOLUTION

1- $e^{x^2+2x-3} = 1 \Leftrightarrow e^{x^2+2x-3} = e^0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$

On a $\Delta = 16$ *et* $(x = 1$ *ou* $x = -3)$ donc $\quad S = \{1,-3\}$

2- $e^{2x+1} = \dfrac{1}{e^x} \Leftrightarrow e^{2x+1} = e^{-x} \Leftrightarrow 2x + 1 = -x \Leftrightarrow x = \dfrac{-1}{3} \Leftrightarrow S = \left\{\dfrac{-1}{3}\right\}$

3- $\dfrac{e^{2x+1}}{e^{x-3}} = e \Leftrightarrow e^{2x+1-(x-3)} = e \Leftrightarrow 2x + 1 - x + 3 = 1 \Leftrightarrow x = -3 \Leftrightarrow S = \{-3\}$

4- $e^x + e^{-x} = 2 \Leftrightarrow e^x + \dfrac{1}{e^x} = 2 \Leftrightarrow (e^x)^2 + 1 = 2e^x \Leftrightarrow (e^x - 1)^2 = 0$

Donc $e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \Leftrightarrow S = \{0\}$

5- $2e^{2x} - 5e^x + 2 = 0$; on pose $X = e^x$; l'équation s'écrit sous forme $2X^2 - 5X + 2 = 0$

On a $\Delta = 9$ *et* $(X = 2$ *ou* $X = \dfrac{1}{2})$ donc

$(e^x = 2$ *ou* $e^x = \dfrac{1}{2}) \Leftrightarrow (x = \ln 2$ *ou* $x = -\ln 2)$ d'où $\quad S = \{\ln 2, -\ln 2\}$

6- $e^{1-x} \leq e^{3x} \Leftrightarrow 1-x \leq 3x \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow S = \left[\frac{1}{4}, +\infty\right[$

7- $1-e^{-x} < 0 \Leftrightarrow 1 < e^{-x} \Leftrightarrow e^0 < e^{-x} \Leftrightarrow 0 < -x \Leftrightarrow x < 0 \Leftrightarrow S =]-\infty, 0[$

8- on a $\frac{2e^x - 3}{e^x - 2} < 0$, on commence par $2e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$, et on a aussi $e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2$, on étudie le signe de $2e^x - 3 \quad et \quad e^x - 2$

x	$-\infty$		$\ln\left(\frac{3}{2}\right)$		$\ln(2)$		$+\infty$
$2e^x - 3$	-	0	+		+		
$e^x - 2$	-	|	-	0	+		
$\frac{2e^x - 3}{e^x - 2}$	+	0	-	||	+		

Donc $S = \left]\ln\left(\frac{3}{2}\right), \ln(2)\right[$

9- on a $e^{2x} - 5e^x + 6 > 0$, posons $X = e^x$, l'inéquation devient $X^2 - 5X + 6 > 0$

Les solutions de l'équation $X^2 - 5X + 6 = 0$ sont $X = 2 \ ou \ X = 3$. on a donc

$(e^x = 2 \ ou \ e^x = 3) \Leftrightarrow (x = \ln 2 \ ou \ x = \ln 3)$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$\ln 3$		$+\infty$
$X = e^x$	0		2		3		$+\infty$
$X^2 - 5X + 6$	+	0	-	0	+		
$e^{2x} - 5e^x + 6$	+	0	-	0	+		

Donc la solution de l'inéquation est: $S =]-\infty, \ln 2[\cup]\ln 3, +\infty[$

2-LIMITES PARTICULIERES

2-1-PROPRIETE

i- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

ii- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$

iii- $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

2-2-EXERCICE

calculer les limites suivantes :

i- $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}}{x}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} (x-1)e^x$

ii- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x - 1}{x^2}$; $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{-x} - 1}{x}$; $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^{3x} - 1}{2x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2e^x - 1}{e^x + 1}$

SOLUTION

1- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x}=\dfrac{0}{-\infty}=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{e^x}{x}}=\dfrac{1}{+\infty}=0$

2- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{3x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}\times(e^x)^2=(+\infty)(+\infty)=+\infty$

3- $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x-e^x=0-0=0$

4- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}=(+\infty)-0=+\infty$

5- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2e^x-1}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x\left(2-\frac{1}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2-\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}=\dfrac{2-0}{1+0}=2$

6- posons $X=-x$; on a $\lim\limits_{x\to0}X=\lim\limits_{x\to0}(-x)=0$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-x}-1}{x}=\lim\limits_{X\to0}\dfrac{e^X-1}{-X}=-\lim\limits_{X\to0}\dfrac{e^X-1}{X}=-1$

7- posons $X=3x$; on a $\lim\limits_{x\to0}X=\lim\limits_{x\to0}3x=0$

$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{3x}-1}{2x}=\lim\limits_{X\to0}\dfrac{e^X-1}{2\frac{X}{3}}=\dfrac{3}{2}\ \lim\limits_{X\to0}\dfrac{e^X-1}{X}=\dfrac{3}{2}\times1=\dfrac{3}{2}$

3-DERIVEE D'UNE FONCTION EXPONENTIELLE

3-1- PROPRIETE

i-la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$; et on a $(\forall x\in\mathbb{R})\ (e^x)'=e^x$

ii- si la fonction u est dérivable sur $I\subset\mathbb{R}$ alors la fonction $x\to e^{u(x)}$ est dérivable sur I, et sa dérivée est : $(\forall x\in I)\ \ (e^{u(x)})'=u'(x)e^{u(x)}$

3-2-EXEMPLE

Etudions la fonction $f(x)=e^x$

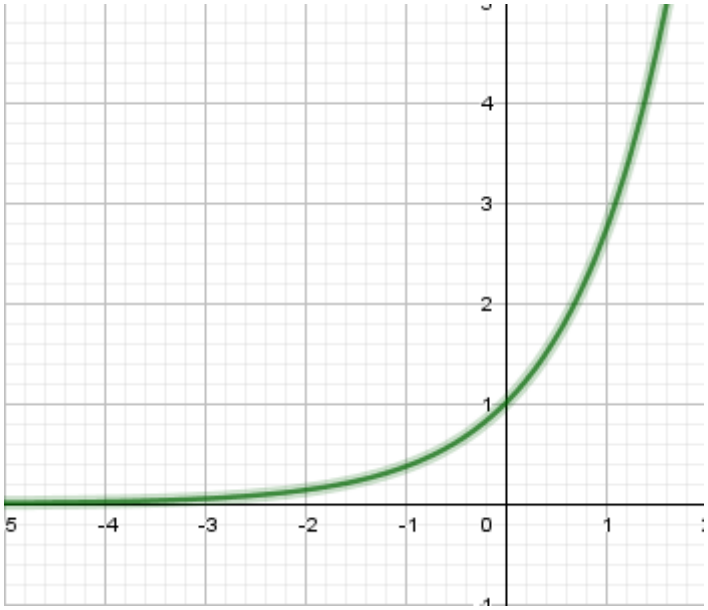
1- $D_f=\mathbb{R}$

2- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$

3- $(\forall x\in\mathbb{R})\quad f'(x)=(e^x)'=e^x>0$

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	0 ↗ $+\infty$

4- représentation graphique



3-3-EXERCICE

1- calculer la dérivée de la fonction f dans les cas suivants :

$f(x)=2x-e^{x}$; $f(x)=xe^{x^2-1}$; $f(x)=(x-1)e^{-\frac{1}{x}}$

2- soit $f(x)=2e^{2x}-3e^{x}+1$

a- déterminer le domaine de définition de f, et calculer les limites aux bornes de D_f

b-étudier les variations de f

c-déterminer les points d'intersections de l'axe des abscisses et la courbe C_f

d- déterminer l'équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 0

e- étudier les branches infinies

f-tracer la courbe C_f

4-FONCTION EXPONENTIELLE DE BASE a

4-1-DEFINITION

soit a un réel strictement positif et différent de 1, la fonction exponentielle de base a, qui se note $\exp_a$ et définie par : $\exp_a(x)=a^x$

$(\forall x\in\mathbb{R})\qquad \exp_a(x)=a^x=e^{x\ln a}$

4-2-PROPRIETE

i-$(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R})\quad a^x=a^y\Leftrightarrow x=y$

ii-$(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R})\quad a^xa^y=a^{x+y}\quad ;\quad \frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}\quad ;\quad (a^x)^y=a^{xy}$

$iii-si\ 0<a<1\quad alors\quad (\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)\quad a^x<a^y\Leftrightarrow x>y$

$iv-si\ a>1\quad alors\quad (\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)\quad a^x<a^y\Leftrightarrow x<y$

4-3-EXERCICE

1- résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$2^x=3$; $16^x-5\times4^x+6=0$

2- résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$5^x < 10;$ $9^x > 3^{-x+1};$ $4^x - 3\times 2^x + 2 \geq 0$

4-4-FONCTION EXPONENTIELLE A BASE 10

DEFINITION

la fonction $x \to 10^x$ est appelée fonction exponentielle à base 10, et on a

$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall \in]0,+\infty[)$ $10^x = y \Leftrightarrow x = \log y$

EXERCICE 1

Soit $g(x) = e^{2x} - 2x - 1$

1-étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$

2-déduire le signe de g(x) sur $\mathbb{R}$

3-soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = (x+1)e^{-2x} + x + 1$

a- calculer les limites de f au voisinage de $\pm\infty$

b-étudier les branches infinies de C_f

c- montrer que $f'(x) = g(x)e^{-2x}$

d-donner TV

e- étudier la concavité de C_f

f-tracer C_f

EXERCICE 2

1-Soit $g(x) = 1 + (x-1)e^x$

a- déterminer D_g et calculer les limites en $\pm\infty$

b-étudier les variations de g et déduire le signe de g

2-Soit $f(x) = (x-2)(e^x + 1)$

a- calculer les limites en $\pm\infty$

b- étudier les branches infinies de C_f

c-étudier les variations de f

d-étudier la concavité de C_f

e- étudier les positions relatives de C_f et la droite d'équation $y = x - 2$ et tracer C_f

EXERCICE 3

Soit $f(x) = x - \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$

1- déterminer D_f et étudier la parité de f

2-calculer les limites en $\pm\infty$

3-calculer les limites à droite et à gauche de f en 0

4-a- vérifier que :

$$\left(\forall x \in D_f\right) \qquad f(x) = x - 1 - \frac{2e^{-x}}{1 - e^{-x}}$$

b- déduire que $y = x - 1$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$

5-a-étudier les variations de f

a- montrer que f(x)=0 admet une solution dans $]\ln 2, \ln 5[$

6- étudier la concavité de C_f , tracer C_f

EXERCICE 4

Soit f une fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = 2x - 1 + \dfrac{1}{e^x - 1} , & x > 0 \\ f(x) = 1 - \dfrac{2}{e^x + 1} , & x \le 0 \end{cases}$$

1-a- étudier la continuité de f au point 0

b- calculer les limites de f au $+\infty$ et $-\infty$

c- étudier les branches infinies de (C_f)

d- étudier la position relative de f et la droite $y = 2x - 1$ au voisinage de $+\infty$

2- étudier la dérivabilité de f à gauche au point 0, et déduire la demi-tangente de (C_f) au point 0

3-a- calculer $f'(x)$, puis donner le tableau de variation de f

b-tracer (C_f)

EXERCICE 5

Soit f une fonction définie par

$$\begin{cases} f(x) = e^{\frac{2}{x}} , & < 0 \\ f(x) = x\ln(1 + x^2) , & x \ge 0 \end{cases}$$

1-a- étudier la continuité de f au point 0

b- calculer les limites de f au $+\infty$ et $-\infty$

c- étudier les branches infinies de (C_f)

2- étudier la dérivabilité de f au point 0, et déduire la tangente de (C_f) au point 0

3-a- calculer $f'(x)$, puis donner le tableau de variation de f

b- montrer que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion au point (-1), et donner l'équation de la tangente de (C_f) au point (-1)

c-tracer (C_f)