

EXERCICE

Soit f une fonction définie sur $D = [0, 1[\cup]1, +\infty[$ par
$$\begin{cases} f(x) = x \left(1 - \frac{1}{\ln x} \right)^2, & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1-a- Montrer que f est continue à droite au point d'abscisse 0

b- montrer que f est dérivable à droite au point d'abscisse 0

2-a- calculer la limite de f au voisinage de $+\infty$

b- calculer les limites de f à droite et à gauche au point d'abscisse 1

3-a- vérifier que $(\forall x \in D \setminus \{0\}) \quad f(x) - x = \frac{x}{\ln x} \left(\frac{1}{\ln x} - 2 \right)$

b- étudier les branches infinies de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$

c- déterminer les points d'intersection de la courbe (C) et la droite d'équation $y = x$

4-a- montrer que $(\forall x \in D \setminus \{0\}) \quad f'(x) = \left(\frac{\ln x - 1}{\ln x} \right) \left(\frac{\ln^2(x) - \ln(x) + 2}{\ln^2(x)} \right)$

b- donner le tableau de variation de f

c-tracer la courbe (C)

5- Soit F une fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $F(x) = x^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\ln x} \right)$

a- calculer $F'(x)$

b- calculer l'aire de la surface limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \sqrt{e}$ et $x = e$

SOLUTION

1-a- Montrons que f est continue à droite au point d'abscisse 0

On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \left(1 - \frac{1}{\ln x} \right)^2 = 0$, car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

Donc f est continue à droite au point d'abscisse 0

b- montrons que f est dérivable à droite au point d'abscisse 0

On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 - \frac{1}{\ln x} \right)^2 = 1$, car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

Donc f est dérivable à droite au point d'abscisse 0

2-a- calculons la limite de f au voisinage de $+\infty$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{1}{\ln x} \right)^2 = +\infty$, car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

b- calculons les limites de f à droite et à gauche au point d'abscisse 1

- On a $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x \left(1 - \frac{1}{\ln x} \right)^2 = \left(1 - \frac{1}{0^+} \right)^2 = +\infty$

- On a $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x \left(1 - \frac{1}{\ln x} \right)^2 = \left(1 - \frac{1}{0^-} \right)^2 = +\infty$

3-a- vérifions que $(\forall x \in D \setminus \{0\}) \quad f(x) - x = \frac{x}{\ln x} \left(\frac{1}{\ln x} - 2 \right)$

On a

$$f(x) - x = x \left(1 - \frac{1}{\ln x} \right)^2 - x = x \left[\left(1 - \frac{1}{\ln x} \right)^2 - 1 \right] = x \left(1 - \frac{1}{\ln x} - 1 \right) \left(1 - \frac{1}{\ln x} + 1 \right) = \frac{x}{\ln x} \left(\frac{1}{\ln x} - 2 \right)$$

b- étudions les branches infinies de la courbe (C) au voisinage de $+\infty$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\ln x} \right)^2 = 1$, car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\ln x} \left(\frac{1}{\ln x} - 2 \right) = (+\infty)(0 - 2) = -\infty, \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+$$

La courbe (C) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y = x$ au voisinage de $+\infty$

c- déterminons les points d'intersection de la courbe (C) et la droite d'équation $y = x$

On a

$$f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{\ln x} \left(\frac{1}{\ln x} - 2 \right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \sqrt{e}$$

la courbe (C) coupe la droite d'équation aux points $(0, 0)$ et $(\sqrt{e}, \sqrt{e})$

4-a- montrons que $(\forall x \in D \setminus \{0\}) \quad f'(x) = \left(\frac{\ln x - 1}{\ln x} \right) \left(\frac{\ln^2(x) - \ln(x) + 2}{\ln^2(x)} \right)$

On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \times \left(1 - \frac{1}{\ln x} \right)^2 + x \times 2 \left(1 - \frac{1}{\ln x} \right) \left(1 - \frac{1}{\ln x} \right)' = \left(1 - \frac{1}{\ln x} \right)^2 + 2x \left(1 - \frac{1}{\ln x} \right) \left(\frac{1}{x(\ln x)^2} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{\ln x} \right) \left(1 - \frac{1}{\ln x} + \frac{2}{(\ln x)^2} \right) = \left(\frac{\ln x - 1}{\ln x} \right) \left(\frac{\ln^2(x) - \ln(x) + 2}{\ln^2(x)} \right) \end{aligned}$$

b- donnons le tableau de variation de f

Le signe de $f'(x)$ est le signe de $\frac{\ln x - 1}{\ln x}$, car

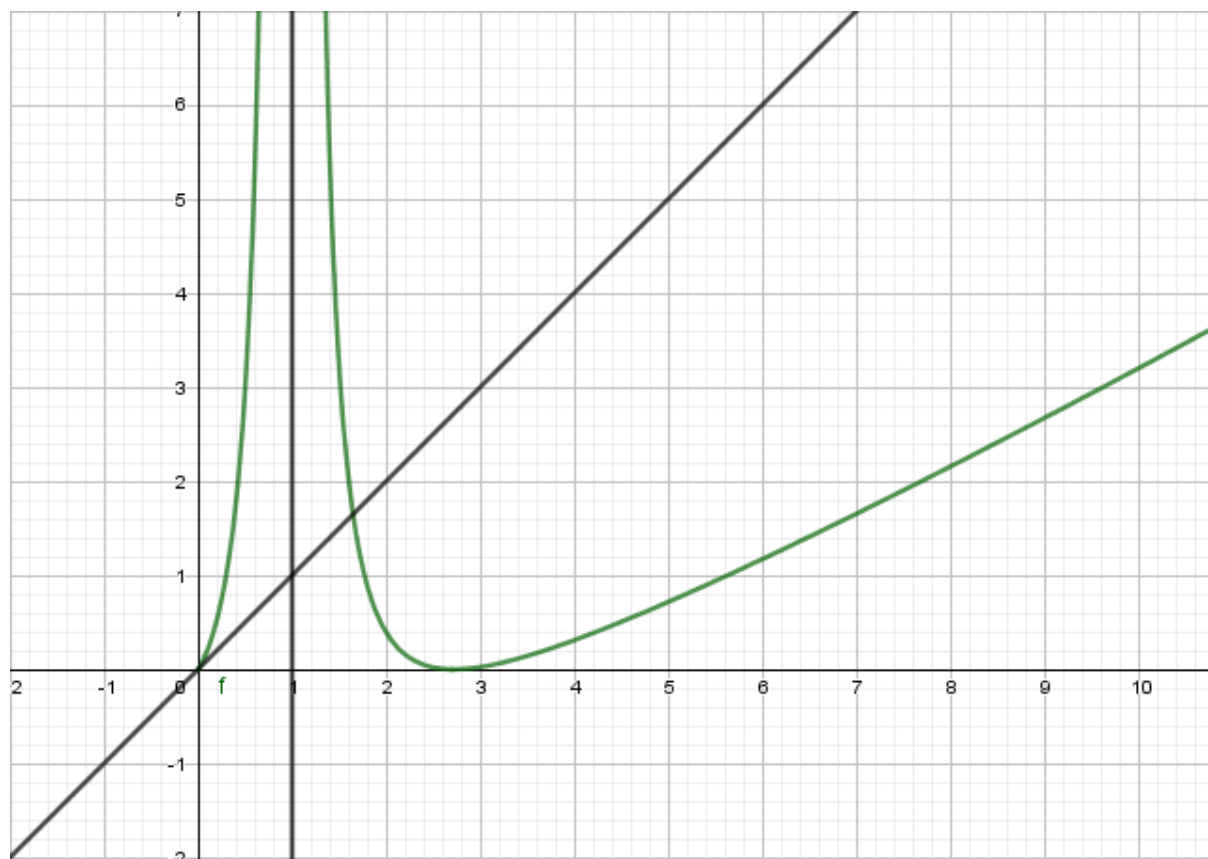
$$(\forall x \in D \setminus \{0\}) \quad \ln^2(x) - \ln(x) + 2 > 0 \text{ (utiliser } \Delta \text{) et } \ln^2(x) > 0$$

x	0	1	e	$+\infty$
$\ln(x)-1$	-	-	0	+
$\ln(x)$	-	0	+	+
$\frac{\ln x - 1}{\ln x}$	+	-	0	+

Le tableau de variation de f

x	0	1	e	$+\infty$	
f'(x)	+		-	0	+
f(x)	0	$+\infty$	$+\infty$	0	$+\infty$

c- traçons la courbe (C)



a- calculons F'(x)

$$\begin{aligned}
 F'(x) &= 2x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\ln x} \right) + x^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\ln x} \right)' = 2x \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\ln x} \right) + x^2 \left(\frac{1}{x(\ln x)^2} \right) \\
 &= x - \frac{2x}{\ln x} + \frac{x}{(\ln x)^2} = x \left(\frac{\ln^2(x) - 2\ln(x) + 1}{(\ln x)^2} \right) = x \left(1 - \frac{1}{\ln x} \right)^2 = f(x)
 \end{aligned}$$

b- calculons l'aire de la surface limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \sqrt{e}$ et $x = e$

$$\text{On a } A = \int_{\sqrt{e}}^e |f(x)| dx \text{ ua} = \int_{\sqrt{e}}^e f(x) dx \text{ ua} = \left(F(e) - F(\sqrt{e}) \right) \text{ ua} = \frac{e}{2} (3 - e) \text{ ua}$$

