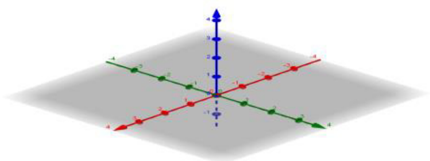
1-ORIENTATION DE L'ESPACE

1-1-DEFINITION

Un repère $O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ est de sens direct si "le bonhomme d'ampère" placé sur l'axe (OZ), les pieds en O, la tête du côté de Z positifs et regarde les graduations positives de l'axe (OY) sur sa gauche. Dans le cas contraire, le repère est dit indirect



1-2-PRODUIT VECTORIEL

a-DEFINITION

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et on note $\vec{u}\wedge\vec{v}$, l'unique vecteur $\vec{w}$ tel que

i- $\vec{w}=\vec{0}$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

ii- $\vec{w}\neq\vec{0}$ et sa direction est orthogonale à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, son sens est tel que la base $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ est directe, sa norme est $\left\|\vec{w}\right\|=\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|\times\left|\sin\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)\right|$

DESSIN

b-PROPRIETE

Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, et pour tout réel k, on a

i- $\vec{u}\wedge\vec{v}=-\vec{v}\wedge\vec{u}$

ii- $\vec{u}+\vec{v}\ \wedge\vec{w}=\ \vec{u}\wedge\vec{w}\ +\ \vec{v}\wedge\vec{w}$

iii- $\vec{u}\wedge\ k\vec{v}\ =\ k\vec{u}\ \wedge\vec{v}=k\ \vec{u}\wedge\vec{v}$

iv- $\vec{u}\wedge\vec{0}=\vec{0}$

v- $\vec{u}\wedge\vec{v}\ \wedge\vec{w}\neq\vec{u}\wedge\ \vec{v}\wedge\vec{w}$

1-3- COORDONNEE D'UN PRODUIT VECTORIEL

a-PROPRIETE

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}$. Soient $\vec{u}\ \ x,y,z$ et $\vec{v}\ \ x',y',z'$ deux vecteurs de l'espace, le triplet X,Y,Z sont les coordonnées du produit vectoriel $\vec{u}\wedge\vec{v}$ tel que: $X=\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}$, $Y=-\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}$ et $Z=\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & x & x' \\ \vec{j} & y & y' \\ \vec{k} & z & z' \end{vmatrix}=X\vec{i}+Y\vec{j}+Z\vec{k}$$

<u>b-EXERCICE</u>

Calculer $\vec{u}\wedge\vec{v}$ tel que : $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$ et $\vec{v}=-\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$

<u>1-4-CALCUL DE LA SURFACE</u>

<u>a-PROPRIETE</u>

i- soit ABC un triangle, la surface du triangle ABC est: $S=\dfrac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$

ii- soit ABCD un parallélogramme, la surface de ABCD est : $S=\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right\|$

<u>b-EXERCICE</u>

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, on considère les points $A\ \ 1,1,2$, $B\ \ 2,4,0$ et $C\ \ 0,3,1$

i- calculer la surface du triangle ABC

ii- déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD est parallélogramme, puis calculer la surface du ABCD

<u>2-DISTANCE D'UN POINT A UNE DROITE</u>

<u>2-1- PROPRIETE</u>

Soit (D) une droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$, la distance du point B à la droite (D) est : $d\ \ B,(D)\ =\dfrac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$

<u>Démonstration</u>

$\overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}=\ \ \overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HB}\ \ \wedge\vec{u}=\ \ \overrightarrow{AH}\wedge\vec{u}\ \ +\ \ \overrightarrow{HB}\wedge\vec{u}\ \ =\overrightarrow{HB}\wedge\vec{u}$ et

$$\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\vec{u}\right\|=\left\|\overrightarrow{HB}\wedge\vec{u}\right\|=\left\|\overrightarrow{HB}\right\|.\left\|\vec{u}\right\|.\left|\sin\left(\overrightarrow{\overrightarrow{HB},\vec{u}}\right)\right|=\left\|\overrightarrow{HB}\right\|.\left\|\vec{u}\right\|$$

<u>2-2-EXERCICE</u>

Soit (D) une droite qui passe par le point A(1,-2,4) et de vecteur directeur $\vec{u}\ \ 1,-1,3$, déterminer la distance du point B(0,1,1) à la droite (D)

<u>3-EQUATION DU PLAN</u>

<u>3-1-PROPRIETE</u>

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, soient A, B et C trois points non alignés , on a : $M \in (ABC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$

3-2-PROPRIETE

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, soient

$(P) : ax + by + cz + d = 0$ et $(P') : a'x + b'y + c'z + d' = 0$ deux plans dans l'espace.

$\vec{n}(a,b,c)$ et $\overrightarrow{n'}(a',b',c')$ les vecteurs normaux respectifs des plans (P) et (P')

i- $\vec{n} \wedge \overrightarrow{n'} = \vec{0} \Leftrightarrow (P)//(P')$

ii- si $\vec{n} \wedge \overrightarrow{n'} \neq \vec{0}$ alors (P) et (P') se coupent selon une droite (D) de vecteur directeur $\vec{w} = \vec{n} \wedge \overrightarrow{n'}$

3-3-EXERCICE

I -L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points A(-1,2,0) , B(-2,0,-1) et C(0,2,3) et le plan d'équation $2x - y - 2z + 4 = 0$

1- déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ puis déduire la surface du triangle ABC
2- déterminer l'équation cartésienne du plan (ABC)
3- montrer que les plans (P) et (ABC) se coupent selon une droite (Δ) et déterminer sa représentation paramétrique
4- on considère la sphère (S) d'équation cartésienne: $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 2z - 5 = 0$
a- déterminer les coordonnées du centre Ω et le rayon R de la sphère (S)
b- montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S)
5-a- déterminer la représentation paramétrique de la droite (D) qui passe par Ω et perpendiculaire au plan (P)
b- montrer que le plan (P) coupe la sphère selon un cercle (C), déterminer son centre ω et son rayon r

II - L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points A(1,0,-3); B(0,1,-4); et C(1,1,-7)

1- Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, puis déterminer l'équation cartésienne du plan (ABC)
2-on considère dans le plan $(P): y = 3$ le cercle (C) de centre $\omega(1,3,1)$ et de rayon $r = 3$
a- donner une représentation paramétrique de la droite (D) qui passe par ω et perpendiculaire à (P)
b-déterminer l'équation cartésienne de la sphère (S) de centre Ω appartenant au plan (ABC), et qui coupe le plan (P) selon le cercle (C)
3- vérifier que le point E(1,2,5) appartient à (S) puis donner l'équation du plan (Q) tangent à (S) au point (E)