1- LES VECTEURS DANS L'ESPACE

1-1-DEFINITION

Soient A et B deux points dans l'espace (E), le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est déterminé par :
- Sa direction: celle de la droite (AB)
- son sens: de A vers B
- sa norme: la distance AB, notée $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$

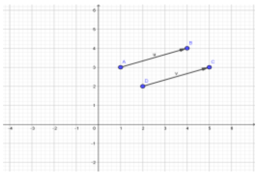
1-2-PROPRIETE

Soit O un point de l'espace, pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique point M tel que : $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$

1-3-PROPRIETE

Soient A, B, C et D 4 points de l'espace.

Les vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux, si et seulement si, ils ont même direction, même sens, et même norme et on écrit: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. On dit que ABCD est Un parallélogramme



1-3-EXERCICE

Soit ABCD un tétraèdre (pyramide à 4 faces triangulaires)

1-construire le point E tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$

2- construire le point F symétrique du point C par rapport au point A

3- montrer que FAEB est un parallélogramme

2-OPERATIONS SUR LES VECTEURS

2-1- L'ADDITION DES VECTEURS

a-DEFINITION

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Soient O, B et C des points tels que $\overline{OB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{v}$, la somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur: $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OD}$ tel que OBDC est un parallélogramme

b-PROPRIETE

1-Pour tous points A, B et C de l'espace, on a: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

2-Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace, on a:

$\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$ élément neutre

$\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$ élément symétrique

$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ commutativité

$\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ associativité

$(V_3,+)$ est un groupe commutatif

2-2-MULTIPICATION D'UN REEL PAR UN VECTEUR

a-DEFINITION

Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace et k un réel, on définit le vecteur $k.\vec{u}$ de la façon suivante.

i- si $k = 0$ alors $k.\vec{u} = 0.\vec{u} = \vec{0}$

ii- si $\vec{u} = \vec{0}$ alors $k.\vec{u} = k.\vec{0} = \vec{0}$

iii- si $k \neq 0 \quad et \quad \vec{u} \neq \vec{0}$ alors $k.\vec{u}$ est le vecteur qui a

. même direction que $\vec{u}$

. même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$; et de sens contraire à celui de $\vec{u}$ si $k < 0$

. pour norme $\left\|k.\vec{u}\right\| = |k|.\left\|\vec{u}\right\|$

b-PROPRIETE

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace , α et β deux réels , on a:

i- $(\alpha + \beta).\vec{u} = \alpha.\vec{u} + \beta.\vec{u}$

ii- $\alpha.(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha.\vec{u} + \alpha.\vec{v}$

iii- $\alpha.(\beta.\vec{u}) = (\alpha \times \beta).\vec{u}$

iv- $1.\vec{u} = \vec{u}$

2-3- COLINEARITE DES VECTEURS

a-DEFINITION

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k.\vec{u}$

b-REMARQUE

Le vecteur nul est colinéaire avec tous les vecteurs de l'espace

c-PROPRIETE

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de l'espace. $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires si :

$\alpha.\vec{u} + \beta.\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$

Démonstration (par l'absurde)

3-DROITES DANS L'ESPACE

3-1-DEFINITION

Soit (D) une droite dans l'espace. Tout couple $(A, \vec{u})$ où A est un point de (D) et $\vec{u}$ un vecteur directeur de (D) est appelé un repère de la droite (D) et on écrit $(D) = D(A, \vec{u})$

3-2-PROPRIETE

Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace. L'ensemble des points M tel que $\overrightarrow{AM} = k.\vec{u}$ où k est un réel , est la droite $D\left(A, \vec{u}\right) = \left\{M \in (E) \,/\, \overrightarrow{AM} = k.\vec{u}\right\}$

4- VECTEURS COPLANAIRES

4-1-PLAN DANS L'ESPACE

a-DEFINITION

i- Tout plan dans l'espace est défini par un point et deux vecteurs non colinéaires, appelés vecteurs directeurs du plan ii- soit A un point de l'espace (E), et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires. l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ où α et β sont des réels , est le plan qui passe par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on le note:

$P \;\; A,\vec{u},\vec{v} \;=\;\; M \in \;E \;/\; \overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

4-2-VECTEURS COPLANAIRES

a-DEFINITION

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et A un point de l'espace. Considérons les points B, C et D tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$. On dit que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si A, B, C, et D sont coplanaires

b-PROPRIETE

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires, et $\vec{w}$ un vecteur de l'espace. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement s'il existe α et β deux réels tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

c-PROPRIETE

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace. $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires si:

$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

5-PARALLELISME DANS L'ESPACE

5-1-DROITES PARALLELES

PROPRIETE

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'un espace. Les droites $D \;\; A,\vec{u}$ et $D' \;\; A',\vec{v}$ sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires: $D \;//\; D' \;\Leftrightarrow\; \exists k \in \mathbb{R} \qquad \vec{u} = k.\vec{v}$

5-2-DROITE ET PLAN PARALLELE

PROPRIETE

Soient $D \;\; A,\vec{u}$ une droite et $P \;\; B,\vec{v},\vec{w}$ est un plan dans l'espace. La droite (D) est parallèle au plan (P), si et seulement si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires:

$D \;//\; P \;\Leftrightarrow \exists \;\; k,k' \;\in \mathbb{R}^2 \;\; \vec{u} = k\vec{v} + k'\vec{w}$

5-3- PLANS PARALLELES

PROPRIETE

Les plans $P \;\; A,\vec{u},\vec{v}$ et $P' \;\; A',\vec{u'},\vec{v'}$ sont parallèles, si et seulement si, $\vec{u}',\vec{u},\vec{v}$ et $\vec{v}',\vec{u},\vec{v}$ sont coplanaires:

$P \;//\; P' \;\Leftrightarrow \exists \;\; \alpha,\beta,\alpha',\beta' \;\in \mathbb{R}^4 \;\; \vec{u}' = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \qquad \vec{v}' = \alpha'\vec{u} + \beta'\vec{v}$