1-FORMULE DE TRANSFORMATION

1-1-PROPRIETE

(P) est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on a :

$\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$

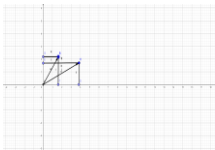
Démonstration

On a $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ et $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$

$\cos(a)=\dfrac{x}{\|\vec{u}\|}$ et $\sin(a)=\dfrac{y}{\|\vec{u}\|}$

$\cos(b)=\dfrac{x'}{\|\vec{v}\|}$ et $\sin(b)=\dfrac{y'}{\|\vec{v}\|}$

On a : $(\vec{u},\vec{v})=a-b$ et



$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos(\vec{u},\vec{v})$;

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|(\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b))$; donc

$\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$

1-2-PROPTIETE

i-Soient a et b deux réels, on a :

$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$

$\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)$

$\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\sin(b)\cos(a)$

$\cos(2a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)=2\cos^2(a)-1=1-2\sin^2(a)$

$\sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$

ii-soient a et b deux réels différents de $\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, on a :

$\tan(a+b)=\dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$ et $\tan(a-b)=\dfrac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$

$\tan(2a)=\dfrac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}$

Démonstration

1-3-EXERCICE

1-calculer $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$; $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$

2- montrer que $\cos(x)+\sin(x)=\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$

3- montrer que $1+\sin(x)=\left(\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)+\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)^2$

1-4-LE CARRE DE COS(a), SIN(a) , TAN(a)

a-PROPRIETE

Soit a un réel on a : $\cos^2(a)=\dfrac{1+\cos(2a)}{2}$; $\sin^2(a)=\dfrac{1-\cos(2a)}{2}$; $\tan^2(a)=\dfrac{1-\cos(2a)}{1+\cos(2a)}$

b-EXERCICE

1- montrer que : $1+\cos(x)-\sin(x)=\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)$

2- montrer que : $2\sin(x)+\sin(2x)=8\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\cos^3\left(\dfrac{x}{2}\right)$

1-5-ECRITURE DE COS(a) , SIN(a) , TAN(a) EN FONCTION DE TAN(x/2)

a-PROPRIETE

Soit x un réel tel que $x \neq \ 2k+1\ \pi$ et $k\in\mathbb{Z}$, on a :

$$\cos(a)=\frac{1-\tan^2(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}\ ;\ \sin(a)=\frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+\tan^2(\frac{x}{2})}\ ;\quad \tan(x)=\frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan^2(\frac{x}{2})}$$

b-EXERCICE

On pose $t=\tan(\dfrac{x}{2})$ et $x\neq\ 2k+1\ \pi$ où $k\in\mathbb{Z}$

Montrer que : $\dfrac{\sin(x)}{1+\cos(x)}=t$ et $\dfrac{1-\cos(x)}{1+\cos(x)}=t^2$

2-TRANSFORMATION D’UNE SOMME EN PRODUIT

2-1-PROPRIETE

Soient p et q deux réels , on a

i- $\cos(p)+\cos(q)=2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$

ii- $\cos(p)-\cos(q)=-2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$

iii- $\sin(p)+\sin(q)=2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$

iv- $\sin(p)-\sin(q)=2\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$

Démonstration

Posons p=a+b et q=a-b alors $a=\dfrac{p+q}{2}$ et $b=\dfrac{p-q}{2}$, on a :

cos(a+b)=cos(a).cos(b)-sin(a).sin(b) et cos(a-b)=cos(a).cos(b)+sin(a).sin(b)

2-2-EXERCICE

Transformer les expressions suivantes en forme de produit

i- $A(x)=\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x)$

ii- $B(x)=1+cox(x)+\cos(2x)+\cos(3x)$

3-TRANSFORMATION DU PRODUIT EN SOMME

3-1-PROPRIETE

Soient a et b deux réels, on a

i- $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\ \cos(a+b) + \cos(a-b)$

ii- $\sin(a)\sin(b) = \dfrac{-1}{2}\ \cos(a+b) - \cos(a-b)$

iii- $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}\ \sin(a+b) + \sin(a-b)$

<u>3-2-EXERCICE</u>

Transformer les expressions suivantes en forme de somme

i- $A(x) = \cos(x)\cos(5x)$

ii- $B(x) = \sin(3x)\sin(4x)$

iii- $C(x) = \cos(x - \dfrac{\pi}{3})\sin(2x + \dfrac{\pi}{4})$

<u>4-EQUATION TRIGONOMETRIQUE</u>

<u>4-1-PROPRIETE</u>

1- $\cos(x) = \cos(\alpha) \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi, ou, x = -\alpha + 2k\pi$

2- $\sin(x) = \sin(\alpha) \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi, ou, x = \pi - \alpha + 2k\pi$

3- $\tan(x) = \tan(\alpha) \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi$

<u>4-2-TRANSFORMATION DE a.cos(x)+b.sin(x)</u>

<u>a-PROPRIETE</u>

Soient a et b deux réels tels que $(a,b) \neq (0,0)$, il existe un réel α tel que

$$a\cos(x) + b\sin(x) = \sqrt{a^2 + b^2}\cos(x-\alpha) \text{ où } \cos(\alpha) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ et } \sin(\alpha) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

<u>Démonstration</u>

<u>b-EXERCICE</u>

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

i- $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}$

ii- $\cos(2x) + \sin(2x) = \dfrac{-\sqrt{6}}{2}$