

LE PRODUIT SCALAIRE

1-ANALYSE DU PRODUIT SCALAIRE

1-1-FORME ANALYTIQUE DU PRODUIT SCALAIRE

a-PROPRIETE

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$

Alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$

Démonstration

b-EXERCICE

1- soient $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ et $\vec{v} = 5\vec{i} + 7\vec{j}$, calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$

2- Soient $\vec{u} = (2m-1)\vec{i} + 4m\vec{j}$ et $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$, déterminer m pour que $\vec{u} \perp \vec{v}$

1-2-NORME ET DISTANCE

a-PROPRIETE

(P) est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

i- Si $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

ii- Si $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ alors $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

b-EXERCICE

1- Soient $\vec{u} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$; $\vec{v} = (2m-1)\vec{i} + 3\vec{j}$; calculer $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$. Déterminer m pour que

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{13}$$

2- Soient A(-1,3), B(2,6) et C(2m,m-1), déterminer m pour que ABC soit un triangle isocèle en A

1-3-INEGALITE DE GAUCHY-SCHWARTZ

PROPRIETE

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs

i- on a l'inégalité suivante : $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$

ii- on a $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|$ si et seulement si $\vec{u}, \vec{v}$ sont colinéaires

démonstration

$$|\cos(\vec{u}, \vec{v})| \leq 1$$

1-4-INEGALITE TRIANGULAIRE

PROPRIETE

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs

i- on a l'inégalité suivante : $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

ii- on a $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et ont même sens

2-PRODUIT SCALAIRE ET LES ANGLES

2-1-COORDONNEES POLAIRES D'UN VECTEUR

PROPRIETE

LE PRODUIT SCALAIRE

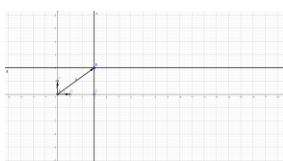
Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $((O, \vec{i}, \vec{j}))$. Si α est la mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ alors $\vec{u} = \|\vec{u}\|(\cos(\alpha)\vec{i} + \sin(\alpha)\vec{j})$

Démonstration

Soit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$, on a

$$\cos(\alpha) = \frac{x}{\|\vec{u}\|}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{y}{\|\vec{u}\|}$$



2-2-CALCUL : $\cos(\vec{U}, \vec{V})$; $\sin(\vec{U}, \vec{V})$

a-PROPRIETE

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on a :

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \quad \text{et} \quad \sin(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\det(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}$$

Démonstration

Utilisons : $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$ et $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$

b-EXERCICE

1-calculer $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ et $\sin(\vec{u}, \vec{v})$ tels que $\vec{u} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ et $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$

2-on considère les points A(1,3) ; B(3,1) et C(-3,-1), calculer $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

2-3-SURFACE D'UN TRIANGLE

a-PROPRIETE

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit ABC un triangle, on a :

$$S = \frac{1}{2} |\det(\vec{u}, \vec{v})|$$

Démonstration

Utilisons la définition du sinus de l'angle (u,v)

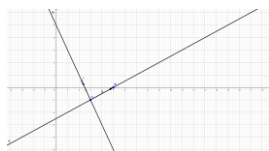
b-EXERCICE

Soient A(1,2) ; B(-1,1) et C(3,-2) ; calculer la surface du triangle ABC : S_{ABC}

3-EQUATION D'UNE DROITE

a-DEFINITION

Soit (D) une droite dans le plan (P). Tout vecteur non nul orthogonal au vecteur directeur de la droite est appelé vecteur normal de (D)



b-PROPRIETE

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, et (D) une droite d'équation :

$ax + by + c = 0$, le vecteur $\vec{n}(a, b)$ est un vecteur normal de (D)

Démonstration

$\vec{u}(-b, a); \vec{n}(a, b)$

3-2-L'EQUATION DE LA DROITE

a-PROPRIETE

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Si (D) est une droite qui passe par $A(x_A, y_A)$ et $\vec{n}(a, b)$ son vecteur normal, alors : $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$ est l'équation de la droite (D)

Démonstration

3-3-PERPENDICULARITE DE DEUX DROITES

a-PROPRIETE

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère deux droites : (D) : $ax+by+c=0$ et (D') : $a'x+b'y+c'=0$. (D) et (D') sont perpendiculaires si et seulement si : $aa'+bb'=0$. $(D) \perp (D') \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{n'} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n'} = 0$

b-EXERCICE

Soit (D) une droite passant par A(1,-1) et de vecteur normal $\vec{n}(5, 2)$

1-donner une équation de la droite (D)

2-Soit (D') d'équation $y = \frac{2}{5}x - 3$, montrer que (D) et (D') sont perpendiculaires

3-Soit (D'') d'équation $(2m-3)x - 5y + 11 = 0$, déterminer m pour que $(D) \perp (D'')$

3-4-DISTANCE D'UN POINT A UNE DROITE

a-PROPRIETE

(P) est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit (D) une droite d'équation $ax+by+c=0$ Tel que : $(a, b) \neq (0, 0)$, et $A(x_A, y_A)$ un point du plan (P), la distance du point à la droite (D)

est définie par : $d(A, (D)) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

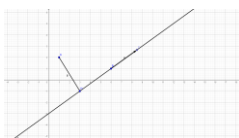
Démonstration

$\vec{AH} = \alpha \vec{n}$ et $H \in (D) \Leftrightarrow ax_H + by_H + c = 0$ et $x_H = x_A + \alpha a$; $y_H = y_A + \alpha b$

LE PRODUIT SCALAIRE

$$\alpha = \frac{-(ax_A + by_A + c)}{a^2 + b^2}$$

$$d(A, (D)) = \left\| \overrightarrow{AH} \right\| = |\alpha| \left\| \vec{n} \right\|$$



b-EXERCICE

(P) est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit A(2,-3) un point du plan, et (D) une droite qui passe par A et de vecteur normal $\vec{n}(3, -2)$

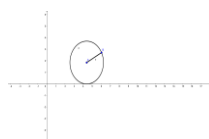
1-déterminer l'équation de la droite (D)

2-soit B(1,5) un point du plan, calculer la distance de B à la droite (D)

4-LE CERCLE

4-1-DEFINITION

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Ω est un point de (P) et R un réel positif. Le cercle (C) de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M de (P) tels que : $\Omega M = R$, on le note par $C(\Omega, R)$



4-2-L'EQUATION DU CERCLE

a-PROPRIETE

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. L'équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon R est : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

b-EXERCICE

1-Soit (C) un cercle de centre $\Omega(3, 4)$ et de rayon $R=2$, écrire l'équation du cercle (C)

2-écrire l'équation du cercle (C) de centre $\Omega(-2, 1)$ et qui passe par le point A(4, -2)

4-3-EQUATION D'UN CERCLE DEFINI PAR SON DIAMETRE

a-PROPRIETE

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. A et B deux points du plan

i- Le cercle (C) dont le diamètre est [AB] est l'ensemble des points M tels que :

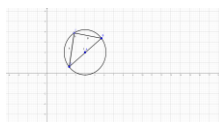
$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

ii-soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$

$M(x, y)$ un point du cercle (C)

L'équation du cercle (C) est :

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$$



LE PRODUIT SCALAIRE

b-EXERCICE

Soient A(-1,4) et B(3,1) deux points du plan (P)

1-déterminer l'équation du cercle (C) dont le diamètre [AB]

2-déterminer le centre Ω et le rayon du cercle (C)

4-4-CERCLE DEFINI PAR TROIS POINTS

a-PROPRIETE

Soient A,B et C trois points non alignés du plan (P). il existe un cercle unique (C) qui passe par les points A,B et C. le centre de cercle (C) est le point Ω l'intersection des médiatrices du triangle ABC et son rayon est $R=\Omega A$

b-EXERCICE

Soient A(2,1), B(4,-1) et C(0,-3) des points du plans . déterminer l'équation du cercle (C)

4-5-REPRESENTATION PARAMETRIQUE DU CERCLE

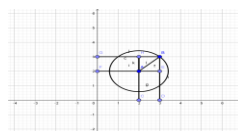
a-PROPRIETE

(P) est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Le cercle (C) de centre $\Omega(a,b)$ et de rayon R

est l'ensemble des points M(x,y) tels que :

$$\begin{cases} x = a + R \cos(\alpha) \\ y = b + R \sin(\alpha) \end{cases}$$



4-6-L'ENSEMBLE DES POINTS M(x,y) D'EQUATION : $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

a-PROPRIETE

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soient a, b et c des réels. L'équation :

$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ est une équation d'un cercle si et seulement si :

$$a^2 + b^2 - c \geq 0$$

Démonstration

b-EXERCICE

Soit l'équation : $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 3 = 0$ montrer que c'est l'équation d'un cercle en déterminant le centre et le rayon

4-7-L'INTERIEUR ET L'EXTERIEUR DU CERCLE

a-DEFINITION

(P) est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, et (C) un cercle de centre Ω et de rayon R, M est un point du plan.

i- Si $\Omega M > R$ alors M se trouve à l'extérieur du cercle (C)

ii- Si $\Omega M < R$ alors M se trouve à l'intérieur du cercle (C)

iii- Si $\Omega M = R$ alors M appartient au cercle (C)

b-EXERCICE

1- Soit (C) le cercle d'équation : $x^2 + y^2 + x - 3y - \frac{3}{2} = 0$

i- déterminer le centre Ω et le rayon du cercle (C)

ii- soit A(-1,2), calculer ΩA , et déterminer le lieu de A

LE PRODUIT SCALAIRE

2- Soit (C) le cercle d'équation : $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$

i- déterminer le centre Ω et le rayon du cercle (C)

ii- tracer (C) et la droite (D) d'équation : $x-y=0$

iii- résoudre graphiquement le système suivant

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 < 0 \\ x - y > 0 \end{cases}$$

4-8-L'INTERSECTION DE LA DROITE ET DU CERCLE

a-PROPRIETE

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit (C) un cercle de centre Ω et de rayon R, (D) une droite dans le plan. Soit d la distance du point Ω à la droite (D)

i- si $d > R$ alors (D) ne coupe pas (C)

ii- si $d < R$ alors (D) coupe (C) en deux points

iii- si $d = R$ alors (D) coupe (C) en un seul point A, on dit que (D) est tangent à (C) au point A

b-EXERCICE

Etudier la position relative de la droite (D) et le cercle (C) dans les cas suivants :

i- (C) : $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ et (D) : $2x - y = 0$

ii- (C) : $(x+2)^2 + (y+2)^2 = 2$ et (D) : $x - y - 2 = 0$

iii- (C) : $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$ et (D) : $x + y - 3 = 0$

4-9-L'EQUATION DE LA TANGENTE AU CERCLE EN UN DE SES POINTS

a-PROPRIETE

Soit (C) un cercle de centre Ω et de rayon R, et a un point du cercle (C). Soit (Δ) la tangente au cercle (C) au point A, on a : $M \in (\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{A\Omega} = 0$.

Si $\Omega(a, b)$; $A(x_A, y_A)$ et $M(x, y)$, alors on a : $(x - x_A)(a - x_A) + (y - y_A)(b - y_A) = 0$

b-EXERCICE

Soit (C) : $x^2 + y^2 + x - 2y = 0$ et $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ un point du plan

i- déterminer le centre et le rayon du cercle (C)

ii- montrer que A appartient à (C)

iii- déterminer l'équation de la tangente au cercle (C) au point A