1-BRANCHES INFINIES

1-1-ASYMPTOTE PARALLELE A L'AXE DES ORDONNEES

a-DEFINITION

Soit a un réel, si $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, on dit que la droite d'équation x=a est une asymptote à la courbe C_f

b-EXEMPLE

Soit $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$

1-2-ASYMPTOTE PARALLELE A L'AXE DES ABSCISSES

a-DEFINITION

Soit b un réel, si $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = b$, on dit que la droite d'équation y=b est une asymptote à la courbe C_f au voisinage de $\pm\infty$

b-EXEMPLE

Soit $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$

1-3-EXERCICE

Soit $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

1-4-ASYMPTOTE OBLIQUE

a-DEFINITION

Soient a et b deux réels tels que $a \neq 0$, si $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) - (ax+b) = 0$, on dit que la droite d'équation $y = ax+b$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $\pm\infty$

b-PROPRIETE

La droite d'équation $y = ax+b$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $\pm\infty$, si et seulement si , $\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a \qquad et \qquad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - ax = b$

c-EXEMPLE

Soit $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x+1}$

1-5-EXERCICE

EX1 : Soit $f(x) = \dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$

EX2 : Soit $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$

2-DIRECTION ASYPTOTIQUE

2-1-DEFINITION (1)

si $\lim_{x \to \pm} f(x) = \pm\infty \qquad et \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$, on dit que la courbe C_f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $\pm\infty$

Exemple

Soit $f(x) = x^2$

2-2-DEFINITION (2)

Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ et $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}=0$, on dit que la courbe C_f admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $\pm\infty$

Exemple

Soit $f(x)=\sqrt{x}$

2-3-DEFINITION (3)

Si $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}=a$ et $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-ax=\pm\infty$
on dit que la courbe C_f admet une branche parabolique de direction la droite d'équation y=ax au voisinage de $\pm\infty$

Exemple

Soit $f(x)=x+\sqrt{x}$

2-4-EXERCICE

Soit $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x^2$

3-CONCAVITE D'UNE COURBE-POINT D'INFLEXION

3-1-CONCAVITE D'UNE COURBE

a-DEFINITION

i- on dit que la courbe C_f est convexe si la courbe se trouve au dessus de toutes ses tangentes
ii- on dit que la courbe C_f est concave si la courbe se trouve au dessous de toutes ses tangentes

b-PROPRIETE

i- une fonction f est convexe sur un intervalle I, si et seulement si, la dérivée seconde f'' est positive sur I
ii- une fonction est concave sur un intervalle I, si et seulement si, la dérivée seconde f'' est négative sur I

3-2-POINT D'INFLEXION

a-DEFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. un point d'inflexion est un point où la courbe C_f traverse sa tangente en ce point

b-PROPRIETE

Un point $(x_0,f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe C_f si $f''(x_0)=0$ et f'' change de signe en x_0 .

c-EXEMPLE

Soit $f(x)=x^3$

3-3-EXERCICE

Soit $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$

4-CENTRE DE SYMETRIE-AXE DE SYMETRIE

4-1- AXE DE SYMETRIE

a-PROPRIETE

La droite d'équation x=a est un axe de symétrie de la courbe C_f, si et seulement si :

$\forall x\in D_f \qquad f(2a-x)=f(x)$

b-EXEMPLE

Soit $f(x) = x^2 - 2x + 3$, $x = 1$

4-2-CENTRE DE SYMETRIE

a-PROPRIETE

Soient a et b deux réels , le point I(a,b) est un centre de symétrie de la courbe C_f , si et seulement si : $\forall x \in D_f \quad f(2a - x) = 2b - f(x)$

b-EXEMPLE

Soit $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1} \quad et \quad I(-1,2)$

4-3-EXERCICE

1- Soit $f(x) = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

EXE1

Soit $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

1-déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f

2- étudier les variations de f

3- étudier les positions relatives de C_f et la droite y=1

4- tracer C_f

EXE2

Soit $f(x)=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$

1- déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f

2-étudier les variations de f

3-a- étudier les branches infinies de C_f au voisinage de $\pm\infty$

b- étudier les positions relatives de C_f et l'asymptote oblique

4- tracer C_f

EXE3

Soit $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}$

1- déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f

2- étudier la dérivabilité de f au point 0 et interpréter le résultat géométriquement

3- montrer que : $f'(x)=\dfrac{x^2(x-3)}{(x-2)^2\sqrt{\dfrac{x^3}{x-2}}}$

et donner le tableau de variation de f

4-déterminer l'asymptote oblique de C_f au voisinage de $\pm\infty$

5-tracer C_f

EXE4

Soit $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x^{\;2}$

1- déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f

2-a- montrer que : $f'(x)=\dfrac{-2f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$

b- montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}\quad f'(x)\neq 0$

c- donner le tableau de variation de f

3-calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter le résultat géométriquement

4-donner l'équation de la tangente (T) au point 0

5- tracer C_f et (T)

EXE5

Soit $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$

1- calculer les limites au voisinage de $\pm\infty$

2-étudier les branches infinies

3-étudier les variations de f

4- étudier la concavité de C_f et donner l'équation de la tangente (T) au point 2

5- tracer C_f

EXE6

Soit $f(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

1-déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f

2- étudier les variations de f

3-étudier la concavité de C_f

4-montrer que $I(0,1)$ est un centre de symétrie de C_f

5- tracer C_f

EXE7

Soit $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{x+1} & ,x\le 0 \\ f(x)=\sqrt{x^2+x} & ,x>0 \end{cases}$

1- déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f

2-calculer les limites de f au voisinage de 0

3-étudier la dérivabilité de f au voisinage de 0

4- étudier les variations de f

5- étudier les branches infinies de C_f

6-tracer C_f

EXE7

Soit $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin 2x-\cos x$

1-montrer que 2π est la période de f

2-étudier les variations de f sur l'intervalle $\left[-\pi,\pi\right]$

3-tracer C_f