1-RAPPEL

1-Soit f une fonction défini par : $f(x)=x^2-2x+3$

a- calculer le taux de variation de f entre x et y

b-étudier la monotonie de f sur $[1,+\infty[$ et $]-\infty,1]$

c-donner le tableau de variation de f

d-déterminer les extrémums s'ils existent

e-tracer (C_f)

f-soit g la fonction définie par : $g(x)=x^2-2\left|x\right|+3$

i-étudier la parité de g

ii- donner le tableau de variation de g

iii- tracer(C_g)

2-soit f une fonction définie par : $f(x)=\dfrac{2x}{x-3}$

a-déterminer le domaine de définition de f

b-déterminer le centre et les asymptotes de l'hyperbole (C_f)

c-donner le tableau de variation de f

d- tracer (C_f)

e-soit g la fonction définie par : $g(x)=\dfrac{2x}{\left|x\right|-3}$

i-étudier la parité de g

ii- donner le tableau de variation de g

iii- tracer (C_g)

3- soit f une fonction définie par : $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$

a-déterminer D_f

b- étudier la parité de f

c-calculer le taux de variation de f

d- étudier la monotonie de f sur $[0,1[$ et $]1,+\infty[$

e- donner le tableau de variation de f sur D_f

f- déduire les extremums s'ils existent

2-comparaison de fonctions

2-1-fonction positive – fonction négative

a-propriété

i- f est une fonction positive sur D_f , si $\forall x\in D_f \quad f(x)\geq 0$, la courbe C_f se trouve au dessus de l'axe des abscisses

ii- f est une fonction négative sur D_f, si $\forall x\in D_f \quad f(x)\leq 0$, la courbe C_f se trouve au dessous de l'axe des abscisses

b-exercice

soit $g(x)=\dfrac{3x+2}{-2x^2+x+1}$, étudier le signe de g

2-2-comparaison de deux fonctions

2-2-1- définition

Soient f et g deux fonctions définies sur le même ensemble D. on dit que la fonction f est inférieure ou égale à la fonction g, si $\forall x \in D \quad f(x) \leq g(x)$, et on écrit $f \leq g$. La courbe (C_f) se trouve au dessous de la courbe (C_g)

3-fonction majorée-minorée-bornée

3-1-définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, m et M deux réels
i-on dit que f est majorée par M sur I, si et seulement si, pour tout x de I $f(x) \leq M$

$\forall x \in I \quad f(x) \leq M$

ii-on dit que f est minorée par m sur I, si et seulement si, pour tout x de I $f(x) \geq m$

$\forall x \in I \quad f(x) \geq m$

iii- on dit que f est bornée sur I, si et seulement si, elle est majorée et minorée sur I

3-2-propriété

La fonction est bornée sur I, si et seulement si : $\exists \alpha \in \mathbb{R}^+ \quad \forall x \in I \quad \left|f(x)\right| \leq \alpha$

3-3-exercice

1-soit f une fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

a- déterminer le domaine de définition
b- étudier la parité de f

c-montrer que f est minorée par $\dfrac{-1}{2}$

d-montrer que f est majorée par $\dfrac{1}{2}$

2-soit une fonction définie par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x - 1}$

a- déterminer le domaine de définition
b-étudier le signe de f

c-montrer que f est majorée par $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ sur l'intervalle $]1, +\infty[$

d- montrer que f est bornée sur D_f

4-les extremums d'une fonction

4-1-définition

Soit f une fonction définie sur D_f et a un élément de D_f

i-on dit que f(a) est une valeur maximale absolue de f, si : $\forall x \in D_f \quad f(x) \leq f(a)$

ii-on dit que f(a) est une valeur maximale relative de f, s'il existe un intervalle ouvert I de centre a inclus dans D_f tel que : $\forall x \in I \quad f(x) \leq f(a)$

iii-on dit que f(a) est valeur minimale absolue de f, si : $\forall x \in D_f \quad f(x) \geq f(a)$

iv-on dit que f(a) est une valeur minimale relative de f, s'il existe un intervalle ouvert I de centre a inclus dans D_f tel que : $\forall x \in I \quad f(x) \geq f(a)$

4-2-exercice

1- soit f une fonction définie par : $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$

a- déterminer D_f
b-étudier la parité de f
c- calculer le taux de variation de f entre x et y
d- étudier la monotonie de f sur les intervalles]0,1] et $[1,+\infty[$
e-donner le tableau de variation de f sur D_f
f-déduire les valeurs minimales et maximales si elles existent

2-soit f une fonction définie par : $f(x)=x^2-4x+3$

a- déterminer le sommet de la parabole
b- donner le tableau de variation de f
c- déduire la valeur minimale de f

5-étude de fonction particulière

5-1-fonction $f(x)=ax^3$

a-exercice

Soit f une fonction définie par : $f(x)=2x^3$

i- déterminer D_f et étudier la parité de f
ii- calculer le taux de variation de f, étudier la monotonie de f sur $[0,+\infty[$
iii- donner le tableau de variation de f et tracer (C_f)

b- propriété

Soit f une fonction définie par : $f(x)= ax^3$
i- f est définie sur $\mathbb{R}$, elle est impaire
ii- si a est positif f alors f est croissante sur $\mathbb{R}$, si a est négatif alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$

5-2-fonction $f(x)=\sqrt{x+a}$

a-exercice

Soit f une fonction définie par : $f(x)=\sqrt{x+2}$

i- déterminer le domaine de définition de f
ii-calculer le taux de variation de f et étudier la monotonie de sur D_f
iii-donner le tableau de variation de f et tracer (C_f)

b-propriété

Soit f une fonction définie par : $f(x)=\sqrt{x+a}$

i- f est définie sur $[-a,+\infty[$
ii- elle est croissante sur D_f

5-3- fonction partie entière

a-définition

Soit x un réel, la partie entière de x est le plus grand entier relatif n qui est inférieur ou égal à x, on le note E(x) ou [x].
$E(x)=n \Leftrightarrow n\leq x \prec n+1$

b- exemple

1- on a $1\leq \dfrac{4}{3} \prec 2$ donc $E(\dfrac{4}{3})=1$

2- on a E(3)=3 et E(-5)=-5

3- on a $-2 \leq -\sqrt{2} \prec -1$ donc $E(-\sqrt{2}) = -2$ et on a $1 \leq \sqrt{2} \prec 2$ donc $E(\sqrt{2}) = 1$

c-propriété

Soit x un réel, on a

i- $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $E(x) \leq x \prec E(x)+1$

ii- $\forall x \in \mathbb{Z}$ $E(x) = x$

iii- $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ $E(x+n) = E(x)+n$

d-exercice

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ $\forall y \in \mathbb{R}$ $E(x)+E(y) \leq E(x+y)$

6-la composée des fonctions

6-1-définition

Soient une fonction définie sur I et g une fonction définie sur J telle que $f(I) \subset J$. On appelle la composée de deux fonctions f et g, on la note gof la fonction définie par :
$\forall x \in I$ $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

6-2-exercice

Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x) = x^2 - 1$ et $g(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

Calculer gof et déterminer le domaine de définition de gof

6-3-propriété

Soient f une fonction définie sur I et g une fonction définie sur J telle que $f(I) \subset J$

i-si le sens de variation de f sur I est le même sens de variation de g sur J alors la fonction gof est croissante sur I

ii- si le sens de variation de f sur I est différent du sens de variation de g sur J alors la fonction gof est décroissante sur I

démonstration

6-4-exercice

Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x) = \dfrac{x}{x+4}$ et $g(x) = \sqrt{x+1}$

a- déterminer D_f et D_g

b- donner le tableau de variation de f et g

c-étudier les variations de gof sur l'intervalle $[-2,+\infty[$

7-fonction périodique

7-1-définition

Soit f une fonction définie sur D. on dit que f est périodique s'il existe un réel positif T tel que : $\forall x \in D$ on a

i- $x - T \in D$ et $x + T \in D$

ii- $f(x+T) = f(x)$

le nombre T est appelé la période de f

7-2-propriété

Si f est périodique de période T alors $\forall x \in D_f$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ f(x+nT)=f(x)

7-3-exemple

1- soient f(x)= sin(x) ; g(x)= cos(x) ; h(x)= tan(x)

7-4-exercice

Déterminer la période des fonctions suivantes

f(x)=cos(4x) ; g(x)=sin(2x)+4cos(3x)

7-5-représentation d'une fonction périodique

a-propriété

soit f une fonction périodique de période T, soit (C_0) la courbe de f sur I_0 et (C_k) la courbe de f sur I_k. (C_k) est l'image de (C_0) par la translation de vecteur $kT\vec{i}$

b-exemple

étude des fonctions : f(x)=sin(x) ; g(x)=cos(x) ; h(x)=tan(x)

c-exercice

1-soit f(x)= x-E(x)

i- déterminer D_f et montrer que f est périodique de période (1)

ii- étudier f sur l'intervalle [0,1[puis tracer (C_f) sur l'intervalle [-2,2[

2- soit $f(x) = (x - E(x))(E(x) - x + 2)$

i- déterminer D_f et montrer que f est périodique de période (1)

ii- étudier f sur l'intervalle [0,1[puis tracer (C_f) sur l'intervalle [-1,5[

7-6- EXERCICE (suite)

EX1

Soient f et g deux fonction définies par :

$f(x) = \dfrac{-1}{2}x^2 + 2x - 1$ et $g(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$

1-déterminer D_g

2-étudier les variations de f et g

3- montrer que f est majorée par 1

4-déterminer l'image de [-1,0] par f

5-soit h une fonction définie par :

$h(x) = \dfrac{2x^2 - 8x + 6}{x^2 - 4x}$

a- déterminer D_h

b-vérifier que $h(x) = \ g \circ f \ (x)$

c-étudier la monotonie de h sur

$]-\infty,0[;]0,2];[2,4[;]4,+\infty[$

EX2

Soient f et g deux fonctions définies par :

$f(x) = x^2 + 4x + 1$ et $g(x) = \sqrt{x+1}$

1-calculer f(0) et g(0)

2-étudier les variations de f et g

3-tracer (C_f) et (C_g)

4-déterminer graphiquement $f(x) \cdot g(x) \geq 0$

5-soit h une fonction définie par :

$h(x) = x + 2 + 4\sqrt{x+1}$

a-montrer que $h(x) = (f \circ g)(x)$

b-déterminer D_h et étudier la monotonie de h

EX3

Soit f une fonction définie par :

$f(x) = \dfrac{|x|}{\sqrt{9-x^2}}$

1-déterminer D_f

2-étudier la parité de f

3-a-soient x et y deux éléments de D_f ,

calculer $\ f(x)^{\ 2} - \ f(y)^{\ 2}$

b-étudier la monotonie de f sur [0,3[et]-3,0]

EX4

Soit f une fonction monotone sur $\mathbb{R}$ tel que :

$\forall x \in \mathbb{R} \quad f \circ f \circ f \ (x) = x$

1-montrer que f n'est pas décroissante (absurde)

2-montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x$

EX5

Soit $f(x) = 2 - \dfrac{1}{x^2+1}$

1-déterminer D_f et étudier la parité de f

2-montrer que 1 est une valeur minimale de f

3-montrer que f est majorée par 2

4-calculer le taux de variation T(x,y)

5- étudier la monotonie de f sur $[0,+\infty[$

6-déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$

7-soit $g(x) = \sqrt{x-1}$, déterminer D_f et donner le tableau de variation de g

8-soit $h(x) = \ g \circ f \quad x$

a-déterminer h(x) et D_h

b-étudier la monotonie de h et déduire la valeur minimale absolue

EX6

Soit f une fonction monotone sur $\mathbb{R}$ et vérifie les conditions suivantes :

i-f est non constante

ii- $\forall \ x,y \ \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+y) = \dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}$

1-montrer que $f(0)(f(0)-1)(f(0)+1) = 0$

2-montre que $(f(0)-1)(f(0)+1) \neq 0$

3-déduire que f est impaire

4-montrer que $\quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \dfrac{2t}{t^2+1} \leq 1$

a-montrer que f est majorée par 1

b-montrer que f est minorée par (-1)

EX8

Soit g une fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$

$g \circ g \circ g \ (x) = x^2 - 3x + 4$

Calculer $\ g \circ g \ (2)$