## 1-Généralité sur les suites

### 1-1-Définition

Une suite numérique est une fonction définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ , qui à tout entier naturel n, fait correspondre son image u(n) qu'on $u_n$. la suite se note $(u_n)_n$. le nombre $u_n$ s'appelle le terme de rang n ou le terme général de la suite $(u_n)_n$

### 1-2-Exemple

Soit une suite numérique définie par son terme général : $u_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$

a- calculer $u_0$ , $u_1$ , $u_{20}$
b- calculer $u_{n+1}$ , $u_{n-1}$
c- calculer $u_{n+1}-u_n$

### 1-3-Deux type de définition de suites

### a-Défintion1

Si pour tout entier n, le terme général de la suite $(u_n)_n$ s'écrit en fonction de n, $u_n=f(n)$, on dit que la suite $(u_n)_n$ est définie par une formule explicite ; f s'appelle la fonction associée à la suite $(u_n)_n$

### b-Définition2

Une suite récurrente est une suite définie par la donnée d'un premier terme et une forme de récurrence qui permet de calculer chaque terme en fonction du terme précédent.

Autrement dit : $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n), n \geq 0 \end{cases}$

f s'appelle la fonction associée à la suite $(u_n)_n$

### c-Exemple

Soit la suite $(u_n)_n$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1 \end{cases}$

Calculons $u_1$, $u_2$, $u_3$

## 2-Suite majorée-minorée- bornée

### 2-1-Définition

Soit $(u_n)_n$ une suite numérique

i-$(u_n)_n$ est une suite majorée par M sur I, si et seulement si : $\forall n \in I \quad u_n \leq M$

ii-$(u_n)_n$ est une suite minorée par m sur I, si et seulement si : $\forall n \in I \quad u_n \geq m$

iii-$(u_n)_n$ est bornée si elle est majorée et minorée sur I : $\forall n \in I \quad m \leq u_n \leq M$

### 2-2-Exercice

1-Soit $(u_n)_n$ une suite définie par : $u_n = \dfrac{2n+5}{n+1}$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2 \langle u_n \leq 5$

2-Soit $(u_n)_n$ une suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 3 - \dfrac{9}{4u_n} \end{cases}$

Montrer par récurrence que : $u_n \geq \frac{3}{2}$

## 3-Monotonie d'une suite

### 3-1-Définition

Soit $(u_n)_n$ une suite numérique définie dans I
i-$(u_n)_n$ est une suite croissante si et seulement si : $\forall n \in I \quad u_{n+1} - u_n \geq 0$
ii-$(u_n)_n$ est une suite décroissante si et seulement si : $\forall n \in I \quad u_{n+1} - u_n \leq 0$

### 3-2-Exercice

1-Soit $(u_n)_n$ une suite définie par : $u_n = \dfrac{2n+3}{n+1}$
Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_n$

2-Soit une suite $(u_n)_n$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = 4 - \dfrac{3}{u_n} \end{cases}$

a-Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \succ 3$

b-Etudier la monotonie de $u_n \;\; n$

## 4-Suite arithmétique

### 4-1-Définition

Soit $(u_n)_n$ une suite numérique, on dit qu'une suite $(u_n)_n$ est arithmétique si et seulement s'il existe un réel r tel que pour tout n, on a $u_{n+1} - u_n = r$ . r est appelé la raison de la suite $(u_n)_n$

### 4-2-Exercice

Soit une suite $(u_n)_n$ définie par : $u_n = 2n + 4$
a- Montrer que $(u_n)_n$ est une suite arithmétique en déterminant sa raison
b-Déterminer n tel que $u_n=204$

### 4-3-Propriété caractéristique

$(u_n)_n$ est une suite arithmétique de raison r si et seulement si :
i- $u_n-u_p=(n-p)r$
ii- $2u_n=u_{n+1}+u_{n-1}$

### 4-4-Terme général de la suite arithmétique

### a-Propriété

Si $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de premier terme $u_0$ et de raison r, alors $\forall n \in \mathbb{N}$

$u_n = u_0 + nr$

### b-Exercice

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de premier terme $u_0$ et de raison r, tel que $u_5=10$ et $u_2=1$
1-déterminer $u_0$ et r
2- calculer $u_n$ en fonction de n
3- déterminer n tel que $u_n=145$

## 4-Somme de termes successifs d'une suite arithmétique

### a-Propriété

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de raison r, et p un entier naturel tel que $n \geq p$ , on a :

$$u_p + u_{p+1} + \dots\dots\dots + u_n = \frac{n-p+1 \quad u_p + u_n}{2}$$

<u>Démonstration</u>

$U_{p+k}+u_{n-k}=u_p+u_n$

## <u>b-Exercice</u>

<u>EX1</u>

Soit $(u_n)_n$ une suite arithmétique de premier terme $u_0$ et de raison r, telle que $u_7=5$ et $u_9=8$

1- déterminer $u_0$ et r

2-calculer $u_n$ en fonction de n

3- déterminer n tel que $u_n = \frac{205}{2}$

4- calculer : $u_7+u_8+\dots\dots\dots+u_{100}$

<u>EX2</u>

Soit $(u_n)_n$ une suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 1}{u_n} \end{cases}$

1-calculer $u_1$ , $u_2$ , $u_3$

2-montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 \leq u_n \leq 2$

3- étudier la monotonie de $u_n \ {}_n$

4-soit $(v_n)_n$ une suite définie par : $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$

i- calculer $v_0$

ii-montrer que $(v_n)_n$ est une suite arithmétique en déterminant sa raison

iii- calculer $v_n$ puis $u_n$ en fonction de n

iv- calculer $S_n=v_2+v_3+\dots\dots\dots+v_{n+1}$

## <u>5-Suite géométrique</u>

## <u>5-1-Définition</u>

Soit p un entier naturel, on dit que la suite $(u_n)_n$ est une suite géométrique, si et seulement s'il existe un réel q tel que : $\forall n \geq p \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$ ; q est appelé la raison de la suite $(u_n)_n$

## <u>5-2-Exercice</u>

<u>Ex1</u>

Soit $(u_n)_n$ une suite définie par : $u_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

1- calculer $u_0$ , $u_1$ , $u_3$

2-montrer que $(u_n)_n$ est une suite géométrique en déterminant sa raison

<u>Ex2</u>

Soit $(u_n)_n$ une suite définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{9u_n}{4u_n + 3} \end{cases}$

1-calculer $u_1$, $u_2$

2-montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{2} \leq u_n \leq \frac{3}{2}$

3-étudier la monotonie de la suite $(u_n)_n$

4- on pose $v_n = 2 - \dfrac{3}{u_n}$

a- calculer $v_0$

b-montrer que $(v_n)_n$ est une suite géométrique en déterminant sa raison

## 5-3-Propriété caractéristique

$(u_n)_n$ est une suite géométrique si et seulement si : $\forall n \in I \quad {u_n}^2 = u_{n+1} \times u_{n-1}$

## 5-4-Terme général de la suite géométrique

### a-Propriété

Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison q ( $q \neq 0$ ) alors : $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \quad u_n = u_p \times q^{n-p}$

Cas particulier : $u_n = u_0 \times q^n$

### b-Exercice

### Ex1

Soit $(u_n)_n$ une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0$, telle que : $u_1 = 9$ et $u_4 = \dfrac{1}{3}$

1-déterminer q puis $u_0$

2-calculer $u_n$ en fonction de n

3-déterminer n tel que $u_n = \dfrac{1}{81}$

### Ex2

Soit $(u_n)_n$ une suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3 \end{cases}$

1-calculer $u_1$, $u_2$

2-montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq 2$

3-étudier la monotonie de la suite $(u_n)_n$

4-on pose : $v_n = u_n - 3$

a-calculer $v_0$

b-montrer que $(v_n)_n$ est une suite géométrique en déterminant sa raison

c-calculer $v_n$ puis $u_n$ en fonction de n

## 5-5-Somme de termes successifs d'une suite géométrique

### a-Propriété

Si $(u_n)_n$ est une suite géométrique de raison q ( $q \neq 1$ ) et p est un entier naturel tel que

$n \geq p$ alors : $u_p + u_{p+1} + \ldots\ldots\ldots + u_n = \dfrac{u_p - u_{n+1}}{1-q}$

<u>Démonstration</u>

On utilise : $1 + q + q^2 + q^3 + \ldots\ldots\ldots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

## <u>b-Exercice</u>

Soit $(u_n)_n$ une suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n + 7 \end{cases}$

1-montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 \leq u_n \leq 28$

2- étudier la monotonie de $(u_n)_n$

3-on pose : $v_n = u_n - 28$

a- montrer que $(v_n)_n$ est une suite géométrique en déterminant sa raison

b-calculer $v_n$ puis $u_n$ en fonction de n

c-calculer $S_n = v_0 + v_1 + \ldots\ldots\ldots v_n$ puis $S_n' = u_0 + u_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + u_n$

<u>5-6- EXERCICE</u>

| | |
|---|---|
| EX1<br>Soit $(u_n)_n$ une suite définie par : $u_n = \frac{3n-2}{4n+1}$<br>1-montrer que $(u_n)_n$ est majorée par $\frac{3}{4}$<br>2-montrer que $(u_n)_n$ est minorée par (-2) | EX5<br>Soit $(u_n)_n$ : $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + .. + \frac{1}{3n+1}$<br>Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{2}{3} \leq u_n \leq 2$ |
| EX2<br>Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites définies par :<br>$u_n = \frac{2^n + 4n - 5}{4}$ et $v_n = \frac{2^n - 4n + 5}{4}$<br>1-montrer que la suite $(a_n)_n$ définie par :<br>$a_n = u_n + v_n$ est suite géométrique, puis calculer $A = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$<br>2-montrer que la suite $(b_n)_n$ définie par :<br>$b_n = u_n - v_n$ est une suite arithmétique, puis calculer $B = b_0 + b_1 + \ldots + b_n$<br>3- déduire les valeurs des sommes :<br>$U = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ et $V = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ | EX6<br>Soit $(u_n)_n$ une suite définie par : $u_0=0$ et $u_1=1$<br>et $u_{n+2} = \frac{1}{2} u_{n+1} + \frac{1}{2} u_n$ , on pose $v_n = u_{n+1} - u_n$<br>1-montrer que $(v_n)_n$ est une suite géométrique<br>2-calculer $v_n$ en fonction de n<br>3-on pose $S_n = v_0 + \ldots + v_{n-1}$<br>a- montrer que $S_n = u_n$<br>b-calculer $u_n$ en fonction de n |
| EX3<br>Soit $(u_n)_n$ une suite définie par :<br>$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{7u_n - 25}{u_n - 3} \end{cases}$<br>1-montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$<br>$u_n \neq 5$<br>2- on pose $v_n = \frac{1}{u_n - 5}$<br>a-montrer que $(v_n)_n$ est une suite arithmétique en déterminant sa raison<br>b-calculer $v_n$ puis $u_n$ en fonction de n<br>c- calculer $S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ | EX7<br>soit a un entier naturel supérieur à 2, on considère deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par :<br>$\begin{cases} v_0 = a \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$ et $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \end{cases}$<br>1-montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \prec u_n \prec v_n$<br>2-montrer que $(u_n)$est croissante et $(v_n)$ est décroissante<br>3-montrer que : $0 \prec v_{n+1} - u_{n+1} \prec \frac{1}{2}(v_n - u_n)$<br>4-déduire que : $0 \prec v_n - u_n \prec \frac{a-1}{2^n}$<br>5-montrer que : $u_n v_n = a$ |
| EX4<br>Soit $(u_n)_n$ une suite définie par :<br>$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{4} u_n + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n \end{cases}$<br>on pose $v_n = u_n - \left(\frac{3}{4}\right)^n$<br>1-montrer que $(v_n)_n$ est une suite géométrique<br>2-calculer $u_n$ puis $v_n$ en fonction de n<br>3-calculer $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ | 6-montrer que : $u_n \prec \sqrt{a} \prec v_n$<br>7-on pose a=2, déterminer la valeur de n pour que $u_n$ et $v_n$ soient des valeurs approchées à $\sqrt{2}$ au $10^{-6}$ prés |