LIMITES D'UNE FONCTION NUMERIQUE

1-LIMITES INFINIES D'UNE FONCTION A L'INFINI

1-1-DEFINITION

i- Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a, +\infty[$. on dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, lorsque « tout intervalle de la forme $]M, +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour tout x supérieur à A positif », on écrit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ii- Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a, +\infty[$. on dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$, lorsque « $f(x)$ devient négatif et aussi grand que l'on veut en valeur absolue, lorsque x devient suffisamment grand », on écrit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

1-2-LIMITE DE $f(x)=x^n$ A L'INFINI

a-EXEMPLE

1- soit $f(x)=x$

x	10	10^2	10^3	10^4	10^5
f(x)	10	10^2	10^3	10^4	10^5

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, et on écrit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

x	-10	-10^2	-10^3	-10^4	-10^5
f(x)	-10	-10^2	-10^3	-10^4	-10^5

On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$, on écrit $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

2- soit $f(x)=x^2$

x	10	10^2	10^3	10^4	10^5
f(x)	10^2	10^4	10^6	10^8	10^{10}

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, on écrit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$

x	-10	-10^2	-10^3	-10^4	-10^5
f(x)	10^2	10^4	10^6	10^8	10^{10}

On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$, et on écrit $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$

b-PROPRIETE

Soit f une fonction définie par : $f(x)=x^n$, où $n \in \mathbb{N}^*$

i- si n est pair alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$

ii- si n est impair alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$

c-EXERCICE

Calculer les limites de f à l'infini dans les cas suivants : $f(x)=x^5$ et $f(x)=x^{12}$

1-3-LIMITE DE $f(x)=ax^n$ A L'INFINI

a-PROPRIETE

Soit f une fonction définie par : $f(x)=ax^n$ avec a un réel et n un naturel non nul, on a :

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} ax^n = a \lim_{|x| \rightarrow +\infty} x^n$$

b-EXERCICE

Calculer les limites de f à l'infini dans les cas suivants : $f(x)=-2x^3$ et $f(x)=5x^8$

1-4-LIMITES DES FONCTIONS POLYNOMES A L'INFINI

a-PROPRIETE

Soit f une fonction polynôme définie par : $f(x)=a_n x^n + \dots + a_0$ avec $a_n \neq 0$, on a

LIMITES D'UNE FONCTION NUMERIQUE

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} a_n x^n$$

b-EXERCICE

Calculer les limites de f à l'infini dans les cas suivants :

i- $f(x)=2x^5-5x^3+x-6$ ii- $f(x)=-3x^7+2x^4-5x^2$

2-LIMITES FINIES D'UNE FONCTION A L'INFINI

2-1-DEFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a, +\infty[$ (resp, $] - \infty, a[$) et l un réel donné. On dit que f(x) tend vers l quand x tend vers $+\infty$, (resp, $-\infty$) lorsque : f(x) devient assez proche de l, lorsque x est positif (resp, négatif) et suffisamment grand en valeur absolue, on écrit : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$

2-2-LIMITES DE $f(x)=a/x^n$ A L'INFINI

a-EXEMPLE

Soit f une fonction définie par : $f(x)=1/x$

x	10	10 ²	10 ³	10 ⁴
f(x)	10 ⁻¹	10 ⁻²	10 ⁻³	10 ⁻⁴

On écrit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \left(\frac{1}{+\infty} \right) = 0$

x	-10 ¹	-10 ²	-10 ³	-10 ⁴
f(x)	-10 ⁻¹	-10 ⁻²	-10 ⁻³	-10 ⁻⁴

On écrit $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \left(\frac{1}{-\infty} \right) = 0$

b-PROPRIETE

Soit f une fonction définie par : $f(x)=a/x^n$, on a $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{a}{x^n} = \left(\frac{a}{\pm\infty} \right) = 0$

c-EXERCICE

Calculer les limites de f à l'infini dans les cas suivants : $f(x) = \frac{-3}{x^4}$ et $f(x) = \frac{1000}{x^2}$

d-PROPRIETE

Soit f une fonction définie par : $f(x)=a$ où a est un réel, on a $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} a = a$

2-3-LIMITES D'UNE FONCTION RATIONNELLE A L'INFINI

a-PROPRIETE

Soit f une fonction rationnelle définie par : $f(x) = \frac{a_n x^n + \dots + a_0}{b_p x^p + \dots + b_0}$, avec $a_n \neq 0, b_p \neq 0$

On a : $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p}$

i- si $n > p$ alors on a : $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_p} x^{n-p}$

LIMITES D'UNE FONCTION NUMERIQUE

ii- si $n < p$ alors on a : $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_p} \times \frac{1}{x^{p-n}} = 0$

iii- si $n = p$ alors on a : $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_p} = \frac{a_n}{b_p}$

b-EXERCICE

Calculer les limites de f à l'infini dans les cas suivants :

i- $f(x) = \frac{-5x^4 + 3x^2 + 4}{x + 6}$

ii- $f(x) = \frac{7x^2 - 5x + 3}{2x^3 - 5x^2 + 1}$

iii- $f(x) = \frac{2x^3 - 4x + 7}{-3x^3 + 11}$

3-LIMITES D'UNE FONCTION EN UN POINT a

3-1-DEFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, a un élément de I et L un réel. On dit que f(x) tend vers L quand x tend vers a, lorsque : f(x) devient aussi proche de L que l'on veut lorsque x est suffisamment proche de a, on écrit alors, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

3-2-EXEMPLE

1-soit $f(x) = \frac{2x + 4}{x - 3}$, calculons la limite de f au point (-1)

2- soit $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}$, calculons la limite de f au point (2)

3-3-EXERCICE

Calculer la limite de f au point a dans les cas suivants :

i- $f(x) = x^2 - 3x + 2$ et $a=2$

ii- $f(x) = \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}{x}$ et $a=0$

iii- $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 4}$ et $a=(-2)$

3-4-LIMITE A DROITE- LIMITE A GAUCHE

a-DEFINITION

i- On dit que f admet L comme limite à gauche en x_0 , si la restriction de f à $]x_0-r, x_0]$ où r positif, admet L comme limite en x_0 , on note : $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$ ou $\lim_{x \nearrow x_0} f(x) = L$

ii- On dit que f admet L comme limite à droite en x_0 , si la restriction de f à $[x_0, x_0+r[$ où r positif, admet L comme limite en x_0 , on note : $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$ ou $\lim_{x \searrow x_0} f(x) = L$

b-EXEMPLE

Soit f une fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x + 1}{x - 2}, x < 1 \\ f(x) = x^2 - 3x, x \geq 1 \end{cases}$$

LIMITES D'UNE FONCTION NUMERIQUE

Calculons les limites de f à droite et à gauche de (1)

c-THEOREME

Soit f une fonction définie au voisinage de a. f admet une limite L au point a si et seulement si f admet la même limite à gauche et à droite de a

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$$

d-EXERCICE

Calculer les limites à droite et à gauche de f au point x_0 dans les cas suivants

$$i- \begin{cases} f(x) = x^2 + 2x, x \geq 1 \\ f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}, x < 1 \end{cases} \quad \text{où } x_0=1$$

$$ii- f(x) = \frac{|x^2 - 4|}{x^2 - 2x} \quad \text{où } x_0=2$$

4-LIMITE INFINI D'UNE FONCTION AU POINT a

4-1- DEFINITION

Soit f une fonction définie au voisinage de a, on dit que f(x) tend vers $+\infty$ (resp, $-\infty$) quand x tend vers a, lorsque « f(x) devient aussi grand que l'on veut (resp, devient négatif et aussi grand que l'on veut en valeur absolue lorsque x est suffisamment proche de a », on écrit : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, (\text{resp}, -\infty)$

4-2-EXEMPLE

1- Soit f une fonction définie par : $f(x)=1/x$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \frac{1}{0} \notin \mathbb{R}$$

x	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}
f(x)	10	10^2	10^3	10^4

On écrit $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$

x	-10^{-1}	-10^{-2}	-10^{-3}	-10^{-4}
f(x)	-10	-10^2	-10^3	-10^4

On écrit $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$

2- Soit f une fonction définie par : $f(x) = \frac{2x + 1}{2 - x}$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{5}{0} \notin \mathbb{R}$$

On étudie le signe du dénominateur : 2-x

x	$-\infty$	2	$+\infty$
2-x	+		-

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{5}{0^-} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{5}{0^+} = +\infty$$

4-3-EXERCICE

Calculer les limites de f au point x_0 dans les cas suivants :

LIMITES D'UNE FONCTION NUMERIQUE

i- $f(x) = \frac{2x + 1}{x + 2}$ et $x_0 = -2$

ii- $f(x) = \frac{3x - 4}{x^2 - 1}$ et $x_0 = 1$ ou $x_0 = -1$

iii- $f(x) = \frac{-2x + 3}{x - 2}$ et $x_0 = 2$

iv- $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x} - 2}$ et $x_0 = 4$

5-LIMITES ET COMPARAISON

5-1- THEOREME DE COMPAISON

a-THEOREME (1)

Soit I un intervalle et a désigne soit un nombre réel de I, soit $\pm\infty$. Soient f et g deux fonctions définies sur I, telles que: $\forall x \in I \quad f(x) \leq g(x)$, alors

i- Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$

ii- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty$

b-THEOREME DES GENDARMES

Soit I un intervalle et a désigne soit un réel de I, soit $\pm\infty$, soient f, g et h trois fonctions définies sur I telles que : $\forall x \in I \quad g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

c-PROPRIETE

Soient f et u deux fonctions définies sur $I =]a-r, a+r[\setminus \{a\}$, telles que r est positif et a un réel, et soit L un réel. Si pour tout x de I, $|f(x) - L| \leq u(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

d-EXEMPLE

Soit f une fonction définie par : $f(x) = \frac{2x \sin(x)}{x^2 + 1}$, calculer limite de f au $+\infty$

e-EXERCICE

1- Soit f une fonction définie par : $f(x) = \frac{2x + \cos(x)}{3x + \sin(x)}$, calculer limite de f au $+\infty$

6-OPERATION SUR LES LIMITES

6-1-OPERATION SUR LES LIMITES FINIES

a-PROPRIETE

i- Soient f et g deux fonctions qui admettent des limites finies au points a et k un réel, on a

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} kf(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} (f.g)(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)}$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$
L	L'	k.L	L+L'	LxL'	1/L $L \neq 0$	L/L' $L' \neq 0$

ii- Si $f \geq 0$ alors $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$

b-EXERCICE

Calculer les limites de f au voisinage de x_0 dans les cas suivants :

LIMITES D'UNE FONCTION NUMERIQUE

i- $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 4}$ et $x_0 = 3$

ii- $f(x) = x \sin(x)$ et $x_0 = \frac{\pi}{3}$

6-2-OPERATION SUR LES LIMITES INFINIES

a-PROPRIETE

i- Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a, soit a un réel, soit $\pm\infty$ on a :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} (f.g)(x)$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\pm\infty$	L	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F.I	0
$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	F.I	$\pm\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I
$+\infty$	$-\infty$	F.I	$-\infty$	F.I
$-\infty$	$+\infty$	F.I	$-\infty$	F.I

ii- Si $f \geq 0$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = +\infty$

b-EXEMPLE

1- Soit $f(x) = 2x^3 - 5x + 4$, calculons les limites de f à l'infini

2- Soit $f(x) = \frac{2x^5 - 4x^2 + 3}{x^3 + 2x + 7}$, calculons les limites de f à l'infini

3- Soit $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 4}$, calculons les limites de f à l'infini

4- Soit $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5} - x$, calculons les limites de f à l'infini

c-EXERCICE

Calculer les limites suivantes

i- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2x^2 - x + 3} - x$

ii- $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

iii- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x}}$

7-LIMITES TRIGONOMETRIQUES

7-1-PROPRIETE

Soit x et a deux réels on a :

i- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$

ii- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

LIMITES D'UNE FONCTION NUMERIQUE

7-2-EXERCICE

Calculer les limites de f au voisinage de x_0

$$\text{i- } f(x) = \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)}, \quad x_0 = 0 \quad ; \quad \text{ii- } f(x) = \frac{\sqrt{\cos(x)} - \cos(x)}{\sin^2(x)}, \quad x_0 = 0$$

$$\text{iii- } f(x) = \frac{\sin(x-2)}{x^2-4}, \quad x_0 = 2 \quad ; \quad \text{iii- } f(x) = \frac{\sin(x)-1}{2x-\pi}, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$$