1-L'ENSEMBLE FINI

1-1-DEFINITION

on considère un ensemble fini Ede n éléments distincts $x_1, x_2, ..., x_n$. On appelle cardinal de E son nombre d'éléments n, et on écrit $cardE = n$

1-2-PROPRIETE

i-si E et F sont des ensembles finis et disjoints $E \cap F = \varnothing$, alor

$card\ \ E \cup F\ \ = cardE + cardF$

ii- si E et F sont des ensembles finis, alors $card\ \ E \cup F\ \ = cardE + cardF - card\ \ E \cap F$

iii- - si E et F sont des ensembles finis, et $E \subset F$ alors $cardE \leq cardF$

iv- - si E et F sont des ensembles finis, alors $card\ \ E \times F\ \ = cardE \times cardF$

2-PRINCIPE GENERALE DE DENOMBREMENT

2-1-PROPRIETE

Si une opération globale peut se décomposer en k opérations élémentaires successives, ces derniers pouvant s'effectuer respectivement de n_1, n_2,.......,n_k manières, alors l'opération globale peut se faire de $n_1 \times n_2 \times ...... \times n_k$ manières différentes

2-2-EXEMPLE

A la fin d'une réunion de 7 anciens élèves, tout le monde se serre la main, combien de poignées de mains sont échangées : 6 !

2-3-EXERCICE

On veut écrire un code de 3 chiffres différents parmi les chiffres suivants :0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 , combien de codes peut-on écrire

3-NOMBRES D'APPLICATIONS D'UN ENSEMBLE FINI VERS UN ENSEMBLE FINI

3-1-PROPRIETE

Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs m et n le nombre d'applications de E vers F est n^m

Démonstration

3-2-EXERCICE

De combien de façons différentes, on peut distribuer 5 balle de différentes couleurs dans 3 boites, tel que chaque boite peut contenir toutes les balles

4-LES ARRANGEMENTS

4-1-DEFINITION

Soit E un ensemble fini de cardinal n, et soit p un entier naturel tel que $p \leq n$. Tout élément du produit scalaire E^p où $x_1, x_2, ..., x_p$ sont des éléments de E distincts deux à deux, est appelé arrangement de p éléments de E

4-2-EXEMPLE

Soit $E = \{a, b, c, d\}$

Déterminons tous les arrangements de 2 éléments de E :(a,b), (a,c), (a,d)

4-3-PROPRIETE

Soit E un ensemble fini de cardinal n, et soit p un entier naturel tel que $p \leq n$. Le nombre des arrangements de p éléments de E est le nombre : n(n-1)(n-2)....(n-p+1), on le note

$A_n^p = n(n-1).....(n-p+1)$

Exemple

1-on a card(E)=4, $A_4^2 = 4 \times 3 = 12$

2- $A_6^3 = 6.5.4 = 120$

<u>4-4-EXERCICE</u>

1- Calculer A_5^2 , $A_{10}^3 - A_9^2$, $\dfrac{A_4^3}{A_7^4}$

2-résoudre dans $\mathbb{N}$, l'équation $A_{n+2}^2 = 30$

3- on veut former un code de 4 chiffres distincts deux à deux parmi les chiffres suivants :1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Combien y-a-t-il de possibilités

4- on assiste à une course de 20 cheveaux, combien y-t-il de possibité de classer les 4 premiers chevaux

<u>5-LES PERMUTATION</u>

<u>5-1-DEFINITION</u>

Soit E un ensemble fini de cardinal n, tout arrangement de tous les éléments de E est appelé permutation des éléments de E, ou permutation de n éléments. Le nombre des permutations est $A_n^n = n! = n(n-1).....2.1$, on lit « factoriel n »

<u>5-2-EXEMPLE</u>

Soit $E = \quad a,b,c$, déterminons toutes les permutations des éléments de E : (a,b,c) ; (a,c,b)

Le nombre des permutations des éléments de E est : 3 !=3x2=6

<u>5-3-EXERCICE</u>

Avec 5 personnes et 5 chaises, combien y-a-t-il de façons de s'assoir sur une chaise

<u>5-4-PROPRIETE</u>

On admet que $0! = 1$, on a pour tout entier naturel n et p tel que $p \leq n$, on a

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

<u>5-5-EXERCICE</u>

1- calculer $\dfrac{7!}{4!}$ $\dfrac{3!}{9!}$ $\dfrac{8! \times 5!}{10! \times 4!}$

2- soit n un entier naturel, calculer en fonction de n : $\dfrac{(n+2)!}{n!} - \dfrac{n!}{(n-1)!}$

<u>6-LES COMBINAISONS</u>

<u>6-1-DEFINITION</u>

Soit E un ensemble fini de cardinal n, et soit p un entier naturel tel que $p \leq n$. Toute partie de E contenant p éléments est appelée combinaison de p éléments de E

<u>6-2-EXEMPLE</u>

Soit E={a,b,c,d} ; déterminons toutes les parties de E contenant 2 éléments :{a,b} ; {a,c}……..

<u>6-3-PROPRIETE</u>

Le nombre de combinaisons de p éléments parmi n éléments d'un ensemble E est le nombre qu'on note C_n^p tel que $C_n^p = \dfrac{A_n^p}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

<u>Exemple</u>

$$C_4^2 = \frac{A_4^2}{2!} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

6-4-EXERCICE

1- on veut sélectionner 3 élèves parmi 20 élèves pour représenter une école pour participer à un concours. Combien y-t-il de possibilité pour choisir ces 3 élèves

2-calculer $C_7^4 \quad , C_6^6 \quad , C_8^3 + C_8^5$

3- résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation suivante : $2C_n^2 + 6C_n^3 = 9n$

4- montrer que pour tout entier naturel n et p tel que $1 \le p \le n$, on a

$$C_{n+1}^p = \frac{n+1}{p} C_n^{p-1} \quad , C_n^p = C_n^{n-p} \quad , C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$$

7- FORMULE BINOMIALE(FORMULE DE NEWTON)

7-1-PROPRIETE

Soit a et b deux réels et n un entier naturel non nul , on a : $a+b^{\ n} = \sum_{p=0}^{p=n} C_n^p \times a^{n-p} \times b^p$

Démonstration par récurrence

7-2PROPRIETE

Soit E un ensemble fini de cardinal n. $P(E)$ l'ensemble de tous les parties de E, on $card\ \ P(E) = 2^n$

Exemple

1-Soit E={a,b,c} , on a : $P(E) = \ \ \varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, E$

2- $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = (1+1)^n$

8-TIRAGES

8-1-DEFINITION

Dans une urne, il y a n boules, on veut tirer p boules avec $1 \le p \le n$
il existe trois façons de tirer les p boules de l'urne
i-tirage successif avec remise : on tire une première boule, on la note, et on la remet dans l'urne, puis on tire une deuxième boule, on la note, et la remet dans l'urne et ainsi de suite le résultat de ce tirage est le nombre d'application : n^p
ii-tirage successif sans remise : on tire une première boule, on la note, et on la garde, et ainsi de suite. Le résultat de ce tirage est le nombre d'arrangement : A_n^p
iii-tirage simultanément : on tire p boules en même temps. Le résultat de tirage est le nombre de combinaison : C_n^p

8-2-EXERCICE

Un sac contient 12 boules : 5 boules rouges, 4 boules vertes et 3 boules blanches. On tire simultanément 3 boules du sac

a-déterminer le nombre de tirage possible

b- déterminer le nombre de tirage possible de 3 boules rouges

c- déterminer le nombre de tirage possible de 3 boules vertes

d- déterminer le nombre de tirage possible de 3 boules de même couleur

e- déterminer le nombre de tirage possible de 3 boules de 3 couleurs différentes

f- déterminer le nombre de tirage possible de 3 boules : 2 boules rouges et une boule blanche

g- déterminer le nombre de tirage possible d'au moins une boule rouge

2-on tire successivement et sans remise 3 boules du sac : mêmes questions

3- on tire successivement et avec remise 3 boules du sac : mêmes questions

EX 1

Dans une classe de 30, il y a 17 élèves aiment les maths, 12 aiment la physique et 10 aiment les deux.

1-calculer le nombre d'élèves qui aiment soit les maths, soit la physique

2-calculer le nombre d'élèves qui aiment seulement les maths

3-calculer le nombre d'élèves qui aiment seulement la physique

4- calculer le nombre d'élèves qui n'aiment ni la physique, ni les maths

EX 2

Une classe est formée de 17 filles et 20 garçons. On veut former une équipe de 4 élèves

1-combien y a-t-il de possibilités pour former l'équipe

2-combien y-a-t-il de possibilités pour former une équipe contenant 2 filles et 2 garçons

EX 3

On lance 3 dés de différents couleurs en même temps, on lit les faces supérieures de chaque dé

1-dénombrer tous les résultats possibles

2-dénombrer les résultats contenant le nombre (1) une seule fois

3- dénombrer les résultats contenant le nombre (1) deux fois

4- dénombrer les résultats contenant trois nombres différents deux à deux

EX 4

On considère 10 points A_1, A_2,….., A_{10} du plan tel que tout triplet (A_i, A_j, A_k) ne sont pas alignés.

1-dénombrer le nombre de droites constituées par les points A_i

2-dénombrer le nombre de droites passant par A_{10}

3-dénombrer le nombre de triangles constitués par les points A_i

4- dénombrer le nombre de triangles dont le sommet est A_{10}

EX 5

1-Soit n un entier naturel, dénombrer le nombre de couples (x,y) d'entiers naturels x et y tels que x+y=n

2- déduire le nombre de solutions de l'équation x+y+z=50 où x, y et z sont des entiers naturels

EX 5

Un sac contient 5 boules blanches, 3 boules noires, 4 boules rouges, 6 boules vertes. On tire simultanément 3 boules du sac

1- déterminer le nombre de cas possibles

2- déterminer le nombre de cas possibles de tirer 3 boules de même couleur

3-déterminer le nombre de cas possible de tirer 3 boules de différents couleurs deux à deux

4- déterminer le nombre de cas possible de tirer au plus 2 boules noires

EX 6

Une urne A contient 4 boules : 2 rouges et 2 blanches, et une deuxième urne B contient 5 boules : 3 rouges et 2 blanches. On tire au hasard une boule de l'urne A, et on la met dans l'urne B, puis on tire successivement et sans remise 2 boules de l'urne B

1-déterminer le nombre de cas possible

2- déterminer le nombre de cas possible de tirer 3 boules rouges

3- déterminer le nombre de cas possible de tirer 3 boules blanches

EX 7

1- montrer que : $\sum_{k=0}^{k=n} C_n^k = 2^n$

2- calculer le nombre : $a_n = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k \times C_n^k$

3- calculer le nombre : $s_n = \sum_{k=1}^{k=n} k \times C_n^k$

4-calculer le nombre : $t_n = \sum_{k=2}^{k=n} k(k-1) \times C_n^k$

5-en déduire en fonction de n la valeur de

$z_n = \sum_{k=1}^{k=n} k^2 \times C_n^k$
