1-DIVISIBILITE DANS $\mathbb{Z}$

1-1—DEFINITION

Soient a et b deux entiers relatifs, on dit que b divise a et on écrit b/a, s'il existe un entier relatif k tel que : $a = kb$

1-2-PROPRIETE

Soient a, b, α et β des entiers relatifs, on a :

i- a/a ; $a / b \quad et \quad b / c \Rightarrow a / c$; $a / b \quad et \quad b / a \Rightarrow |a| = |b|$

ii- $a / b \quad et \quad c / d \Rightarrow ac / bd$; $a / b \Rightarrow ac / bc$; $a / b \quad et \quad a / c \Rightarrow a / \alpha b + \beta c$

iii- $a / b \Rightarrow a^n / b^n$

1-3-EXERCICE

1- soient x et y des entiers relatifs, montrer que : $x / y \quad et \quad x / y + z \Rightarrow x / z$

2-soient a, b et c des entiers relatifs, montrer que :

$a / 2b + 3c \quad a / b + c \Rightarrow a / b \quad et \quad a / c$

3- soient a, b, c, x et y des entiers relatifs, montrer que :

$a / x - y \quad et \quad a / b - c \Rightarrow a / bx - cy$

2-DIVISION EUCLIDIENNE

2-1-DIVISION EUCLIDIENNE DANS $\mathbb{N}$

a-DEFINITION

Soient a et b deux entiers naturels tel que b non nul. L'opération qui permet de trouver q et r telle que : $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$ est appelée division euclidienne de a par b sur $\mathbb{N}$, le nombre a est appelé dividende, b appelé diviseur, q appelé quotient et r appelé reste

b-PROPRIETE

Soient a et b deux entiers naturels tel que $b \neq 0$, il existe un couple d'entier naturel unique (q,r) : $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$

Démonstration

Soit $E\left(\frac{a}{b}\right) = q$

c-EXERCICE

Soient a=138 et =12

2-2-DIVISION EUCLIDIENNE DANS $\mathbb{Z}$

a-PROPRIETE

Soit a et b deux entiers relatifs tel que $b \neq 0$, il existe un unique couple (q,r) d'entiers relatifs tel que : $a = bq + r$ et $0 \leq r < 0$

b-EXEMPLE

Soit a=-142 et b=11

c-EXERCICE

1- La division euclidienne des nombres 4294 et 3521 par a donne respectivement pour reste r_1=10 et r_2=12, déterminer a tel que $1 < a < 32$

2-Soit n un entier naturel, la division euclidienne de 135 par n donne pour quotient q et pour reste $r = q^2$, déterminer n

3-NOMBRES PREMIERS

3-1-DEFINITION

l'entier relatif p est un nombre premier, s'il est différent de (-1) et (1) et admet seulement quatre diviseurs (p), (-p), (1) et (-1)

3-2-REMARQUE

Si a est un nombre premier dans $\mathbb{N}$, alors (-a) est premier dans $\mathbb{Z}$ .on se limite d'étudier les nombres premiers dans $\mathbb{N}$.On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers dans $\mathbb{N}$

3-3-THEOREME

Soit a un entier naturel non premier et différent de (1), le plus petit diviseur de a différent de (1) est un nombre premier

Démonstration

Soit D_a l'ensemble des diviseurs de a dans $\mathbb{N}$, $D_a=\{d_1,d_2,\ldots\ldots,d_n\}$

3-4-THEOREME

Pour tout entier n non premier et n>1, il existe un nombre premier p positif tel que $p \mid n$ et $p^2 \leq n$

Exemple

Montrons que 113 est un nombre premier

4-DECOMPOSITION EN PRODUIT DE FACTEURS PREMIERS

4-1-THEOREME

Tout nombre entier relatif n non nul et différent de (1) et (-1) peut s'écrire d'une façon unique sous forme de $n=\varepsilon p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.....p_k^{\alpha_k}$ où $p_1, p_2,\ldots\ldots,p_k$ sont des nombres premiers positifs , $\alpha_1,\alpha_2,.....,\alpha_k$ des entiers naturels et $\varepsilon=\pm 1$ selon le signe de n

4-2-EXEMPLE

Décomposer 132 en produit de facteurs premiers

5- PLUS GRAND DIVISEUR COMMUN

5-1-DEFINITION

Soient a et b deux entiers relatifs, le plus grand diviseur commun de a et b est le plus grand diviseur commun strictement positif de a et b, on le note : $a\wedge b=\Delta(a,b)=pgdc(a,b)$

5-2-DIVISEUR D'UN NOMBRE

a-PROPRIETE

Soit $n=\varepsilon p_1^{\alpha_1}.p_2^{\alpha_2}.....p_k^{\alpha_k}$ et d un entier relatif. D est un diviseur de n si et seulement si la décomposition de d s'écrit sous forme de $d=\varepsilon' p_1^{\beta_1}.p_2^{\beta_2}.....p_k^{\beta_k}$ où $\varepsilon'=\pm 1$ et

$\forall i\in\{1,2,...k\}\quad 0\leq\beta_i\leq\alpha_i$

b-EXEMPLE

Soit $n=180=2^2\times 3^2\times 5$ et $d=45=2^0\times 3^2\times 5$

5-3-DETERMINATION DU PGDC

a-PROPRIETE

Soient a et b deux entiers relatifs tels que $a=\varepsilon.p_1^{\alpha_1}.....p_k^{\alpha_k}$ et $b=\varepsilon'.p_1^{\beta_1}.....p_k^{\beta_k}$, le plus grand diviseur commun de a et b et le nombre d tel que $d=p_1^{\gamma_1}.....p_k^{\gamma_k}$ où $\gamma_i=\inf(\alpha_i,\beta_i)$

$\forall i\in\{1,2,...,k\}$

b-EXEMPLE

Soient $a=180=2^2\times 3^2\times 5\times 7^0$ et $b=84=2^2\times 3\times 5^0\times 7$ donc

$d=a\wedge b=2^2\times 3\times 5^0\times 7^0=12$

5-4-PROPRIETE

Pour tout entier relatif a et b on a

i- $a\wedge b=|a|\wedge|b|$, $a\wedge b=b\wedge a$, $a\wedge a=a\wedge 0=|a|$

ii- $x / a \quad et \qquad x / b \Rightarrow x / a \wedge b$

5-5-ALGORITHME D'EUCLIDE

a-PROPRIETE

Soient a et b deux entiers naturels non nuls, tel que b ne divise pas a, et r le reste de la division euclidienne de a par b , on a : $a \wedge b = b \wedge r$

b-EXEMPLE

On a $180 = 84 \times 2 + 12 \qquad et \qquad 84 = 12 \times 7$ donc $180 \wedge 84 = 84 \wedge 12 = 12$

c-EXERCICE

Déterminer pgdc(126, 216) , pgdc(1764,630)

6-PLUS PETIT MULTIPLE COMMUN

6-1-DEFINITION

Soient a et b deux entiers relatifs, le plus petit multiple commun de a et b est le plus petit multiple commun positif de a et b, on le note : $a \vee b = M(a,b) = ppmc(a,b)$

6-2-MULTIPLE D'UN NOMBRE

a-PROPRIETE

Soient $n = \varepsilon p_1^{\alpha_1} .....p_k^{\alpha_k}$, m est un multiple de n si et seulement si m s'écrit sous forme de $m = \varepsilon' p_1^{\beta_1} .....p_k^{\beta_k} .a$ où $\varepsilon = \pm 1 \qquad \varepsilon' = \pm 1$ et $\forall i \in \{1,2,....k\} \quad \beta_i \geq \alpha_i$

b-EXEMPLE

$n = 12 = 2^2 \times 3$ et $m = 2^4 \times 3^2 \times 5 = 720$

6-3-DETERMINATION DE PPMC

a-PROPRIETE

Soient a et b deux entiers relatifs tels que $a = \varepsilon p_1^{\alpha_1} .....p_k^{\alpha_k}$ et $b = \varepsilon' p_1^{\beta_1} .....p_k^{\beta_k}$. le plus petit multiple commun de a et b est le nombre m tel que $m = p_1^{\gamma_1} .....p_k^{\gamma_k}$ où

$\forall i \in \{1,...,k\} \qquad \gamma_i = \sup(\alpha_i, \beta_i)$

b-EXEMPLE

$a = 180 = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7^0$ et $b = 84 = 2^2 \times 3 \times 5^0 \times 7$

$a \vee b = 2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 1260$

6-4-PROPRIETE

Soient a et b deux entiers relatifs, on a :

i- $a \vee b = b \vee a \quad , \qquad a \vee 1 = |a| \quad , \qquad a \vee 0 = 0$

ii- $a / a \vee b \qquad , b / a \vee b \qquad , a \vee b / ab$

iii- $b / a \Rightarrow a \vee b = |a|$

6-5-RELATION ENTRE PGDC(a,b) ET PPMC(a,b)

a-PROPRIETE

Soient a, b et c des entiers relatifs, on a :

i- $(a \wedge b) \times (a \vee b) = ab$

ii- $|c|(a \wedge b) = (ca) \wedge (cb)$ et $|c|(a \vee b) = (ca) \vee (cb)$

b-EXERCICE

1- Déterminer tous les diviseurs de 77 dans $\mathbb{N}$

2- déterminer x et y de $\mathbb{N}$ tels que $(x \vee y) \times (x \wedge y) = 77$

3-déterminer x et y de $\mathbb{N}$ tels que $x \vee y = 35(x \wedge y)$

7-CONGRUENCE MODULO N

7-1-RELATION BINAIRE

a-DEFINITION

Une relation binaire $\mathscr{R}$ sur un ensemble $\mathbb{Z}$ est une propriété portant sur les couples d'éléments de $\mathbb{Z}$. On notera x $\mathscr{R}$ y le fait est vraie pour le couple (x,y) des éléments de $\mathbb{Z}$

b-EXEMPLE

On définit une relation binaire dans $\mathbb{Z}$ par $\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \quad x\Re y \Leftrightarrow x^2 = y^2$

c-PROPRIETE

Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire définit dans $\mathbb{Z}$, on a

i- $\mathscr{R}$ est réflexive si : $\forall x \in \mathbb{Z} \qquad x\Re x$

ii- $\mathscr{R}$ est symétrique si : $\forall \ x,y \ \in \mathbb{Z}^2 \quad x\Re y \Rightarrow y\Re x$

iii- $\mathscr{R}$ est transitive si : $\forall \ x,y,z \ \in \mathbb{Z}^3 \qquad x\Re y \quad et \quad y\Re z \Rightarrow x\Re z$

7-2-RELATION D'EQUIVALENCE

a-DEFINITION

Une relation binaire est une relation d'équivalence si et seulement si elle est réflexive, symétrique et transitive

b-EXEMPLE

Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire définit dans $\mathbb{Z}$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \quad x\Re y \Leftrightarrow x^2 = y^2$

Montrons que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence dans $\mathbb{Z}$

7-3-CLASSE D'EQUIVALENCE

a-DEFINITION

Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence définit dans $\mathbb{Z}$, et a un élément de $\mathbb{Z}$. On appelle classe d'équivalence de a, l'ensemble $\overline{a} = \ x \in \mathbb{Z} \,/\, x\Re a$

b-EXEMPLE

Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire définit dans $\mathbb{Z}$ par : $\forall (x,y) \in \mathbb{Z}^2 \quad x\Re y \Leftrightarrow x^2 = y^2$

Déterminons la classe d'équivalence d'un entier relatif a

7-4-COMPATIBILITE DE LA RELATION D'EQUIVALENCE AVEC L'ADDITION ET LA MULTIPLICATION

a-PROPRIETE

Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence définit dans $\mathbb{Z}$, elle est compatible avec l'addition et la multiplication dans $\mathbb{Z}$ si on a

i- $\forall \ a,b,c,\mathrm{d} \ \in \mathbb{Z}^4 \qquad a\Re b \quad et \quad c\Re d \Rightarrow (a+c)\Re(b+d)$

ii- $\forall \ a,b,c,\mathrm{d} \ \in \mathbb{Z}^4 \qquad a\Re b \quad et \quad c\Re d \Rightarrow (a\times c)\Re(b\times d)$

b-EXERCICE

Soit n un entier naturel non nul. On définit une relation binaire dans $\mathbb{Z}$ par :

$\forall \ x,y \ \in \mathbb{Z}^2 \quad x\Re y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \qquad x-y = kn$

1-montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence

2-montrer que $\mathscr{R}$ est compatible avec l'addition et la multiplication

3-déterminer les classes d'équivalence de 0, 1, 2

4- déterminer l'ensemble de toutes les classes d'équivalence $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$

7-5-DEFINITION

Soit a et b deux entiers relatifs et n un entier naturel non nul. On dit que a est congru à b modulo n, s'il existe un entier relatif k tel que $a-b=kn$ et on écrit $a \equiv b\left[n\right]$

$a \equiv b\left[n\right] \Leftrightarrow \ \exists k \in \mathbb{Z} \qquad a-b=kn$

7-6-PROPRIETE

Soient n un entier naturel, et a, b, c, d, des entiers relatifs, on a :

i- $\forall a \in \mathbb{Z} \qquad a \equiv a\left[n\right]$

ii- $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \quad a \equiv b\left[n\right] \Leftrightarrow b \equiv a\left[n\right]$

iii- $\forall (a,b,c) \in \mathbb{Z}^3 \ a \equiv b\left[n\right] \qquad et \qquad b \equiv c\left[n\right] \Rightarrow a \equiv c\left[n\right]$

iv- $\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4 \qquad a \equiv b\left[n\right] \qquad et \qquad c \equiv d\left[n\right] \Rightarrow (a+c) \equiv (b+d)\left[n\right]$

$\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4 \qquad a \equiv b\left[n\right] \qquad et \qquad c \equiv d\left[n\right] \Rightarrow (a \times c) \equiv (b \times d)\left[n\right]$

v- $\forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \qquad \forall k \in \mathbb{N} \qquad a \equiv b\left[n\right] \Rightarrow a^k \equiv b^k\left[n\right]$

7-8-OPERATIONS SUR $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

a-DEFINITION

Soient x et y deux entiers relatifs

i- on définit l'addition dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, par : $\overline{a+b} = \overline{a} + \overline{b}$

ii- on définit la multiplication dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, par : $\overline{a \times b} = \overline{a} \times \overline{b}$

b-EXEMPLE

Soit l'ensemble $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} = \ \overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}, \overline{7}$

1- $10 = 8+2 \Leftrightarrow 10 \equiv 2\left[8\right] \Leftrightarrow \overline{10} = \overline{2}$; $14 = 8+6 \Leftrightarrow 14 \equiv 6\left[8\right] \Leftrightarrow \overline{14} = \overline{6}$

2- $\overline{2} + \overline{6} = \overline{2+6} = \overline{8} = \overline{0}$; $\overline{2} \times \overline{4} = \overline{2 \times 4} = \overline{8} = \overline{0}$

$\overline{4} + \overline{6} = \overline{4+6} = \overline{10} = \overline{2}$; $\overline{2} \times \overline{7} = \overline{2 \times 7} = \overline{14} = \overline{6}$

c-EXERCICE

1- montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \qquad 4^{2n+2} \equiv 1\left[15\right]$

2- résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \qquad \overline{x}^3 = \overline{x}$

3- résoudre dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \qquad \overline{3} \times \overline{x} = \overline{4}$

7-9-EXERCICE

EX 1

1- résoudre dans $\mathbb{Z}$, l'équation suivante :

$x+2 \,/\, x^2+2$

2- résoudre dans $\mathbb{Z}$, l'équation suivante :

$xy = 3x + 2y$

EX 2

Soit n un entier naturel, posons

$a_n = 2^{2^n} + 5$

1-montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad a_n \geq 9$

2- montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad 2^{2^n} \equiv 1\left[3\right]$

3- en déduire tous les entiers premiers qui s'écrivent sous forme de a_n

EX 3

Soient p et q deux entiers premiers successifs tels que : $3 < p < q$, on pose $a = p + q$

1- déterminer la parité de a

2-déduire que a n'est pas premier

3-déterminer le plus grand diviseur de a différent de a

4-montrer que tout diviseur de a est inférieur à q

5-montrer que tout diviseur premier de a est inférieur à p

EX 4

Soit n un entier naturel non nul, on pose :

$A = n^4 + n^2 + 1$

1- montrer que A n'est pas premier

2-on pose $a = n^2 + n + 1$ et

$b = n^2 - n + 1$

i- montrer que a et b sont impairs

ii- montrer que si

$d \,/\, a$ et $d \,/\, b \Rightarrow d \,/\, 2n$ et $d \,/\, 2(n^2+1)$

iii- en déduire que $a \wedge b = 1$ (absurde)

EX 5

1-montrer que : $2^{123} + 3^{121} \equiv 0\left[11\right]$

2-montrer que :

$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 5n^3 + n \equiv 0\left[6\right]$

3- montrer que si n est impair alors

$n^2 \equiv 1\left[8\right]$

EX 6

montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$

$49^n - 2352n - 1 \equiv 0\left[2304\right]$

EX 7

1-montrer que pour tout entier naturel p tel que : $1 \leq p \leq 7$ on a $7 \,/\, C_7^p$

2-montrer par récurrence que :

$\forall n \in \mathbb{N} \qquad n^7 \equiv n\left[7\right]$ (TH Ferma)

EX 8

1-En utilisant l'algorithme d'euclide, déterminer une solution particulière dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de l'équation : $137x - 19y = 1$

2- même question pour l'équation

$59x - 68y = 1$