

LES APPLICATIONS

1-APPLICATIONS

1-1- DEFINITION

Considérons deux ensembles E et F non vides. On dit que f est une application de E vers F, si on fait correspondre à tout élément x de E un élément y de tel que $f(x)=y$. on note l'application par : $f : E \rightarrow F$

$$x \mapsto f(x) = y$$

E est l'ensemble de départ et F est l'ensemble d'arrivée

1-2-REMARQUE

Toute fonction numérique est une application de son domaine de définition vers $\mathbb{R}$

1-3-EXEMPLE

1-soit f une fonction définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{x}$, f n'est pas une application car 0 n'a pas d'image

2- soit f une fonction définie de $\mathbb{R} \setminus 0$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{x}$, f est une application car tout élément de $\mathbb{R} \setminus 0$ à une image dans $\mathbb{R}$

1-4-EGALITE DE DEUX APPLICATIONS

a-DEFINITION

Soient f une application de E vers F et g une application de G vers H, on dit que f est égale à g si on a : $f = g \Leftrightarrow \begin{cases} E = G \text{ et } F = H \\ \forall x \in E \quad f(x) = g(x) \end{cases}$

b-EXEMPLE

Soient f une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = 2 \cos^2(x) - 1$ et g une application définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 1 - 2 \sin^2(x)$

2-IMAGE DIRECT ET IMAGE RECIPROQUE D'UNE PARTIE D'UN ENSEMBLE

2-1-DEFINITION

Soit f une application de E vers F

i- soit A une partie de E, l'ensemble des éléments f(x) de F tel que $x \in A$ est appelé Image directe de A et s'écrit $f(A)$ tel que : $f(A) = \{f(x) / x \in A\}$

ii-soit B une partie de F, l'ensemble des éléments x de E tel que $f(x) \in B$ est appelé Image réciproque de B et s'écrit $f^{-1}(B)$ te que : $f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}$

2-2-exemple

1- soit f une application définie de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ par : $f(n) = 2n$; soient $A=\{0,1,2,3,4\}$ et $B=\{0,2,4,6,8,10\}$. On a $f(A)=\{0,2,4,6,8\}$ et $f^{-1}(B) = \{0,1,2,3,4,5\}$

2- soit f une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$.soit $A=]-1,1[$ et $B=]1,4]$, on a $f(A)=[0,1[$ et $f^{-1}(B) = [-2, -1[\cup]1, 2]$

3-PROLONGEMENT ET RESTRICTION D'UNE APPLICATION

3-1-RESTRICTION D'UNE APPLICATION

a-DEFINITION

Soit f une application de E vers F et g une application de A vers F. on dit que l'application g

LES APPLICATIONS

est restriction de l'application f sur A si et seulement si : $A \subset E$ et $\forall x \in A \quad f(x) = g(x)$

b-EXEMPLE

Soit f une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = |x|$, et soit g une application de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = x$. on a $\mathbb{R}^+ \subset \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}^+ \quad f(x) = |x| = x = g(x)$; donc g est une restriction de f sur $\mathbb{R}^+$

3-2-PROLONGEMENT D'UNE APPLICATION

a-DEFINITION

Soient E un ensemble et A une partie de E , f une application de A vers F . Toute application g de E vers F est un prolongement de f sur E si et seulement si f est une restriction de g sur A

b-EXEMPLE

Soit une application de $\mathbb{R} \setminus 1$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, et soit g une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = x + 1$. g est un prolongement de f sur $\mathbb{R} \setminus 1$

4-INJECTION- SURJECTION-BIJECTION

4-1-DEFINITION

Soit f une application de E vers F

i- On dit que f est injective si et seulement si, pour tout y de F admet au plus un antécédent dans E : $\forall x, y \in E^2 \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

ii- On dit que f est surjective si et seulement si, pour tout y de F admet au moins un antécédent dans E : $\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad \text{tel que } f(x)=y$

iii- On dit que f est bijective si et seulement elle est injective et surjective. Pour tout y de F admet un unique antécédent dans E : $\forall y \in F \quad \exists ! x \in E \quad \text{tel que } f(x)=y$

4-2-EXEMPLE

1- Soit $f : \mathbb{R} \setminus 1 \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow f(x) = \frac{2x}{x-1}$$

Etudions si f est injective et surjective

2- Soit $g : \mathbb{R} \setminus 1 \rightarrow \mathbb{R} \setminus 2$

$$x \rightarrow g(x) = \frac{2x}{x-1}$$

Etudions si g est bijective

3- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$

$$x \rightarrow f(x) = \frac{x}{1+|x|}$$

a- montrer que $|f(x)| < 1$

b-étudier si f est bijective

5-L'APPLICATION RECIPROQUE

5-1-DEFINITION

Soit f une bijection de E vers F . L'application qui fait correspondre tout élément y de F un

LES APPLICATIONS

seul antécédent x de E tel que $f(x)=y$ est une bijection de F vers E et on l'appelle la bijection réciproque de f , on la note par : f^{-1}

$$f : E \rightarrow F \quad \text{et} \quad f^{-1} : F \rightarrow E$$
$$x \rightarrow f(x) = y \quad \quad \quad y \rightarrow f^{-1}(y) = x$$

5-2-EXEMPLE

Soit f une application de $\mathbb{R} \setminus -1$ vers $\mathbb{R} \setminus 3$ définie par : $f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$

Montrons que f est bijective et déterminons la bijection réciproque de f

5-3-EXERCICE

Soit f une application de $[1, +\infty[$ vers $[\sqrt{2}, +\infty[$ définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$

Montrer que f est bijective et déterminer la bijection réciproque f^{-1}

6-COMPOSEE DE DEUX APPLICATIONS

6-1-DEFINITION

Etant donné deux applications f et g telles que : $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$. On appelle la composée de f et de g et on note $g \circ f$ l'application définie de E vers G par : $\forall x \in E$

$$g \circ f (x) = g (f(x))$$

6-2-EXEMPLE

Soit f une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^2 - 3$ et g une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ défini par : $g(x) = 2x + 5$. déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$

6-3-EXERCICE

Soit f une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 1}$ et g une application de $\mathbb{R}$

vers $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = 5x + 1$. déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$ et $g \circ g$

6-4-PROPRIETE

Soient f une application de vers F et g une application de F vers G , on a :

i- si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective

ii- si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective

iii- si f et g sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective

6-5-PROPRIETE

Soit f une application bijectives de E vers F , et f^{-1} l'application de F vers E , on a

i- $f \circ f^{-1} = \text{id}_E$ et id_E est appelé l'application identité de E défini par : $\forall x \in E \quad \text{id}_E(x) = x$

ii- $f^{-1} \circ f = \text{id}_F$ et id_F est appelé l'application identité de F défini par : $\forall x \in F \quad \text{id}_F(x) = x$

LES APPLICATIONS

EX1 Soit f une application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(x) = x^2 - 4x + 1$ 1-montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(4-x) = f(x)$ Est-ce que f est injective ? 2-montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geq -3$ Est-ce que f est surjective ? 3-soit g une application de $[2, +\infty[$ vers $[-3, +\infty[$ défini par : $g(x)=f(x)$, montrer que g est bijective et déterminer g^{-1}	EX5 1-montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad -1 < \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} < 1$ 2-soit f une application définie de $\mathbb{R}$ vers $] -1,1[$ Par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$, montrer que $f(x)^2 = 1 - \frac{1}{x^2 + 1}$ 3-montrer que : $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$ $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ 4-montrer que f est bijective et déterminer f^{-1}
EX2 Soit f une application de $\mathbb{R} \setminus -3$ vers B, définie par : $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$ 1-déterminer B pour que f soit bijective 2-déterminer la bijection réciproque f^{-1} 3-déterminer $f^{-1} \circ f$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus -3$	EX6 Soient f et g deux applications définies de $[a,b]$ vers $\mathbb{R}$ telles que : i-$g(x)=x+f(x)$ ii- $f(x) - f(y) \leq \frac{1}{2} x - y$ montrer que g est injective
EX3 Soit f une application de $\mathbb{Z} \times [0,1[$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $f(n, x) = n + x$ 1-montrer que f est injective 2-montrer que f est surjective 3- déterminer $f^{-1}(y)$, $\forall y \in \mathbb{R}$	EX7 Soient E, F et G des parties de $\mathbb{R}$.considérons f une application de E vers F et g une application de G vers E telles que : $\forall x \in G : f \circ g (x) = x^2 + 1$ 1-déterminer g telle que : $f(x) = \frac{1}{x+2}$ 2-déterminer f telle que : $g(x) = \frac{1}{x+5}$
EX4 Soit f une application de $[\frac{1}{4}, +\infty[$ vers $[\frac{-1}{4}, +\infty[$ définie par : $f(x) = x - \sqrt{x}$ 1-montrer que f est une application 2-montrer que f est injective 3-montrre que f est surjective 4-déterminer $f^{-1}(y)$, $\left(\forall y \in [\frac{-1}{4}, +\infty[\right)$	EX8 Soit f une application de E vers F, montrer que 1- f injective $\Rightarrow \forall A, B \in P(E \times P(E))$ $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ 2- f injective $\Rightarrow \forall A \in P(E) \quad f^{-1}(f(A)) = A$ 3- f surjective $\Rightarrow \forall B \in P(F)$ $f(f^{-1}(B)) = B$ 4-f bijective $\Rightarrow \forall A \in P(E)$ $f(E \setminus A) = F \setminus f(A)$

