1-RAPPEL

EXERCICE

Calculer les limites suivantes

i- $\lim_{x\to -1}\frac{x^3+1}{x^2-1}$; $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$; $\lim_{x\to -\sqrt{3}}\frac{x+\sqrt{3}}{x^2-3}$

ii- $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$; $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{2x^2-x-1}$

2-LA CONTINUITE EN UN POINT

2-1-DEFINITION

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et x_0 un élément de I , on dit que f est continue au point x_0 si $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

2-2-EXERCICE

Etudier la continuité de f au point x_0 dans les cas suivants

i- $f(x)=x^2-3x+5$; $x_0=2$

ii- $\begin{cases} f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}; x\neq 1 \\ f(1)=2 \end{cases}$; $x_0=1$

iii- $\begin{cases} f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}; x\neq 2 \\ f(2)=4 \end{cases}$; $x_0=2$

3-LA CONTINUITE A DROITE – A GAUCHE

3-1-DEFINITION

i-Soit f une fonction définie sur un intervalle sous forme $[x_0,x_0+\alpha[$ où $\alpha \succ 0$. on dit que f est continue à droite de x_0, si $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$

ii- Soit f une fonction définie sur un intervalle sous forme $]x_0-\alpha,x_0]$ où $\alpha\succ 0$. on dit que f est continue à gauche de x_0, si $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$

3-2-EXERCICE

1- Considérons la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x)=x^2-3x+1; x\succ 2 \\ f(x)=3x+1; x\leq 2 \end{cases}$

Etudier la continuité de f à droite et à gauche au point 2

2-considérons la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} ; x \succ 1 \\ f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} ; x \prec 1 \\ f(1) = -1 \end{cases}$

Etudier la continuité de f à droite et à gauche de (1)

3-3-PROPRIETE

f est continue au point x_0, si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$

3-4-EXERCICE

Considérons la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{|x^2 - 1|}{x - 1} ; \quad x \neq 1 \\ f(1) = 0 \end{cases}$

1-écrire f(x) sans valeur absolue
2-étudier la continuité de f aux points (1) et (-1)
3-tracer (C_f)

4-LA CONTINUITE SUR UN INTERVALLE

4-1-DEFINITION

i- on dit que f est continue sur un intervalle ouvert I, si elle est continue en tout point de I
ii- on dit que f est continue sur [a,b], si elle est continue sur]a,b[, et continue à droite de a, et à gauche de b

4-2-CONTINUITE DES FONCTIONS PARTICULIERES

PROPRIETE

Les fonctions polynômes, les fonctions rationnelles, et les fonctions : $\sqrt{x}$, sin(x), cos(x), sont continues sur leurs domaines de définitions

4-3-LES OPERATIONS SUR LES FONCTIONS CONTINUES

PROPRIETE

Soient I un intervalle ouvert et k un réel.
i- si f et g sont continues sur I, alors les fonctions f+g, f.g et kf sont continues sur I
ii- si f et g sont continues sur I, et g est non nulle sur I, alors f/g et 1/g sont continues sur I

4-4-CONTINUITE DE LA COMPOSEE DE FONCTIONS

PROPRIETE

Soient I et J deux intervalles ouverts tels que $f(I) \subset J$. Si f est continue sur I et g est continue sur J alors $g \circ f$ est continue sur I

4-5-EXERCICE

1- considérons la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x^2+x-1}{2x^2-3x+1}; x \neq \dfrac{1}{2}; x \neq 1 \\ f(\dfrac{1}{2}) = a \end{cases}$

Déterminer a pour que f soit continue au point (1/2)

2- considérons la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}; x \neq 2 \\ f(2) = \dfrac{9}{8} \end{cases}$

Déterminer D_f et étudier la continuité de f au point (2)

3-soient a et b deux réels et f une fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = 2ax^2 - 3b; -3 \leq x \prec 0 \\ f(x) = 2x - b + a; 0 \leq x \prec 1 \\ f(x) = 4x - a; 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

Déterminer a et b pour que f soit continue sur [-3,2]

5-L'IMAGE D'UN INTERVALLE, D'UN SEGMENT PAR UNE FONCTION CONTINUE

5-1-EXERCICE

Considérons f définie par : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

1- déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f

2- étudier les variations de f

3- déterminer les points d'intersection de (C_f) et les axes des abscisses et des ordonnés

4-étudier la concavité de (C_f) et déterminer la tangente de f au point d'inflexion

5- tracer (C_f) et déterminer l'image de [-1,1] et [2,3]

5-2-PROPRIETE

i- l'image d'un segment par une fonction continue est un segment

ii- l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle

5-3- THEOREME DES VALEURS INTERMEDIAIRES

5-3-1-PROPRIETE

Soit f une fonction continue sur un intervalle ouvert I, a et b deux réels de I. pour tout réel k entre f(a) et f(b), il existe c entre a et b tel que f(c)=k

5-3-2-EXEMPLE

Utiliser l'exercice précédent

5-3-3-RESULTAT1

Si f est continue sur [a,b], et $f(a) \cdot f(b) \prec 0$, alors l'équation f(x)=0 admet au moins une solution dans l'intervalle]a,b[. utiliser l'exercice précédent

5-3-4-RESULTAT2

Si f est continue et strictement monotone sur [a,b], alors pour tout réel k entre f(a) et f(b), il existe un seul c de]a,b[tel que f(c)=k. utiliser l'exercice précédent

6-LA FONCTION RECIPROQUE D'UNE FONCTION CONTINUE

6-1-PROPRIETE

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors pour tout réel y de f(I), l'équation f(x)=y admet une seul solution dans I

6-2-EXERCICE

Soit $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$, tracer (C_f), résoudre f(x)=2, déterminer f^{-1}

6-3-DEFINITION

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, soit f(I)=J. la fonction qui fait correspondre tout élément y de J un seul élément x de I, tel que f(x)=y est appelée la fonction réciproque de f et on la note par (f^{-1}) et on a :

$$\begin{cases} x\in I, y\in J \\ f(x)=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in I, y\in J \\ x=f^{-1}(y) \end{cases}$$

6-4-REMARQUE

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, et f(I)=J, on a :

$\left(\forall x\in I\right)\left(f^{-1}\circ f\right)\left(x\right)=x$ et $\left(\forall y\in J\right)\left(f\circ f^{-1}\right)\left(y\right)=y$

6-5-PROPRIETE

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, f^{-1} sa fonction réciproque, on a :

i- f^{-1} est une fonction continue, strictement monotone sur f(I), et a la même monotonie que f sur I

ii- la courbe $(C_{f^{-1}})$ de la fonction f^{-1} est symétrique à la courbe (C_f) de la fonction f par rapport à la première bissectrice (la droite d'équation y=x) dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

6-6-EXERCICE

Considérons la fonction : $f(x)=x+\sqrt{x+1}$

1-déterminer D_f ,et calculer la limite au borne de D_f

2- étudier les variations de f, tracer (C_f)

3-montrer que f admet une fonction réciproque de I vers J

4- calculer f^{-1} et tracer $(C_{f^{-1}})$

5- montrer que l'équation $f(x)=f^{-1}(x)$ admet une seule solution dans $[-1,+\infty[$

7- FONCTION RACINE N-IEME

7-1-EXERCICE

Etudions les fonctions f(x)=x^2 et g(x)=x^3

7-2-DEFINITION

Soit n un entier naturel non nul. La fonction réciproque de la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $x \rightarrow x^n$, est appelée la fonction racine nième, et on la note par : $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$

i- on note l'image de x par : $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

ii- le nombre $\sqrt[n]{x}$ est appelé la racine nième de x

7-3-PROPRIETE

i- la fonction $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$ est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$, et on a $\lim\limits_{x\rightarrow+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

ii- dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe de la fonction : $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$ est symétrique à la courbe de la fonction : $x \rightarrow x^n$ par rapport à la première bissectrice

7-4-LES OPERATIONS SUR LES RACINES NIEME

7-4-1-PROPRIETE

Soit n et m deux entiers naturels non nuls, a et b deux réels positifs, on a

i- $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ et $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

ii- $\sqrt[n]{a^n} = a$; $\sqrt[nm]{a^n} = \sqrt[m]{a}$ et $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

7-4-2-EXERCICE

1- simplifier : $a = \sqrt[3]{27}$; $b = \sqrt[4]{16}$; $c = \sqrt[5]{243}$

2- rendre rationnel les dominateurs suivants : $a = \frac{1}{\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}}$; $b = \frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$;

$c = \frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$

3- résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

i- $-\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - 2 = 0$

ii- $\left(\frac{1-\sqrt[3]{x}}{3-\sqrt[3]{x}}\right)^3 = 64$

4- calculer les limites suivantes

i- $\lim\limits_{x\rightarrow+\infty} \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x}$; $\lim\limits_{x\rightarrow+\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt{x+1}}$

ii- $\lim\limits_{x\rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$; $\lim\limits_{x\rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x+56}-4}$

EXERCICE1

Calculer les limites suivantes:

$$i-\quad \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x-2}-1}{\sqrt{4-x}-1}\qquad\qquad \lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$$

$$ii-\quad \lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 3x}{x+\sin 2x}\qquad\qquad \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x}-x$$

EXERCICE2

On considère la fonction f définit par:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x} \;;\quad x>0\\ f(0)=\dfrac{1}{4}\\ f(x)=\dfrac{2}{x^2}(1-\cos(\dfrac{x}{2}))\;;\quad x<0\end{cases}$$

1-Etudier la continuité de f à droite de 0

2- Est ce que f est continue au point 0

EXERCICE3

On considère la fonction f définit par:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+x+b}{x^2-1}\;;\quad x<1\\ f(1)=a\\ f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}-1}{x-1}\;;\quad x>1\end{cases}$$

1- Déterminer $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)$ selon les valeurs de b

2- Déterminer les réels a et b pour que f soit continue au point 1

EXERCICE 4

Considérons la fonction f définit par:

$$f(x)=4x^3-3x+\frac{1}{2}$$

1- Etudier les variations de f

2- montrer que $f(x)=0$ admet trois solutions distinctes

3- montrer que l'équation $x^3+\sqrt{x}-1=0$ admet une solution unique

$$\alpha\ dans\ \mathbb{R}^+,\ tel\,que:\frac{1}{2}<\alpha<\frac{3}{4}$$

EXERCICE 5

Soit f une fonction définit par: $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x+2}$

1- Etudier les variations de f

2- soit g la restriction de f sur]-2,-1]

i- montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définit sur un intervalle I qu'il faut déterminer

ii- déterminer l'expression de g^{-1}

EXERCICE 6

On considère la fonction f définit par:

$$f(x)=\frac{x}{2\sqrt{x}-1}$$

1- Etudier les variations de f

2-soit g la restriction de f sur $[1,+\infty[$

i- montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définit sur un intervalle I qu'il faut déterminer

ii- Déterminer g^{-1}

EXERCICE 7

Calculer les limites suivantes

$$i-\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{x+1}}$$

$$ii-\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[4]{x^4+x^2}-\sqrt{x^4-3x^2}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$$

$$iii-\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt[4]{x^2-1}}-\frac{x}{\sqrt[4]{x^2+1}}$$

$$iv-\quad \lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^3+1}}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^4+1}}$$

EXERCICE 8

On considère f définit sur $]2,+\infty[$ par

$$f(x)=\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}\right)^2$$

1- Calculer les limites en $2\ et+\infty$

2- Montrer que si $2<x\le 3$, alors

$$1-\frac{1}{\sqrt[3]{x-2}}\le 0$$

3- montrer que f est strictement décroissante sur $]2,3]$

4- Soit g la restriction de f sur $]2,3]$

i- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définit sur un intervalle J

ii- déduire g^{-1}